ე. ფულაძე

ნ. ოზბეთელაშვილი

მათემატიკური ინდუქცია

მეთოდური სახელმძღვანელო

თბილისი

2019 წ.

§1.1. ზოგადი და კერძო წინადადებანი.

დედუქცია და ინდუქცია

ყველა წინადადება შეიძლება დაიყოს **ზოგად** და **კერძო** წინადადებებად. ზოგადი წინადადებების მაგალითებია:

ა) ნებისმიერ სამკუთხედში ორი გვერდის ჯამი მესამე გვერდზე მეტია.
ბ) ყველა რიცხვი, რომელიც ლუწი ციფრით მთავრდება, იყოფა 2-ზე და ა.შ

კერძოა, მაგალითად, შემდეგი წინადადებანი:

ა) ABC სამკუთხედში ორი და BC გვერდის ჯამი მესამე AC გვერდზე მეტია.
ბ) რიცხვი 136 იყოფა 2-ზე.

გადასვლას ზოგადი წინადადებიდან კერძოზე **დედუქცია** ეწოდება. დედუქცია ხშირად გამოიყენება მათემატიკაში. ყველა ზოგად თეორემას ვამტკიცებთ იმისათვის, რომ შემდგომ გამოვიყენოთ იგი სხვადასხვა კერძო ამოცანის ამოსახსნელად.

ამასთან ერთად მათემატიკაში ხშირად გვხვდება კერძო წინადადებებიდან ზოგადზე გადასვლა. მაგალითად, როდესაც ვიხილავდით $a_1, a_2, a_3,..,a_n$, არითმეტიკულ პროგრესიას, შევნიშნეთ, რომ

$$a_2=a_1+d$$

$$a_2=a_1+2d$$

$$a_3=a_1+3d.$$

ამ კერძო ფორმულებზე დაყრდნობით გავაკეთეთ დასკვნა, რომ ნებისმიერი ნატურალური n-ისათვის $a_n=a_1+(n-1)d$

გადასვლას კერძო წინადადებიდან ზოგადზე **ინდუქცია** ეწოდება.

დედუქციისაგან განსხვავებით ინდუქციამ შეიძლება მიგვიყვანოს როგორც მართებულ, ისე არამართებულ შედეგამდე. მაგალითად, თუ განვიხილავთ $f(n)=n2+n+41$ კვადრატული სამწევრის მნიშვნელობებს სხვადასხვა ნატურალური ნ-ისათვის, შეიძლება შევნიშნოთ რომ ეს მნიშვნელობანი მარტივი რიცხვებით გამოისახებიან. მართლაც,

$$f(1)=43; \qquad f(2)=47;$$

$$f(3)=53\ ; \qquad f(4)=61.$$

და ა.შ. აქედან შეიძლება ვივარაუდოთ, რომ ყოველი ნატურალური n-ისთვის n^2+n+41 გამოსახულება მარტივ რიცხვს წარმოადგენს. მაგრამ ასეთი დასკვნა **მართებული არ არის.** მაგალითად, თუ $n=41$ მაშინ $n^2+n+41=41^2+41+41=41(41+1+1)=41\cdot43$, რაც ნიშნავს, რომ მოცემული გამოსახულება შედგენილია (ე.ი. ვარაუდი არასწორი აღმოჩნდა).

ვთქვათ რაიმე წინადადება მართებულია რამდენიმე კერძო შემთხვევაში. ყველა დანარჩენი შემთხვევის განხილვა ან სრულიად შეუძლებელია, ან დიდი რაოდენობით გამოთვლებს მოითხოვს. როგორღა გავიგოთ, მართებულია თუ არა ეს წინადადება საზოგადოდ? ამ საკითხის გადაწყვეტა ზოგჯერ ხერხდება მსჯელობის თავისებური მეთოდის გამოყენებით, რასაც **მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი** ეწოდება.

*მათემატიკაში ძველთაგან იყენებენ ინდუქციურ მეთოდს, რომელიც დამყარებულია იმაზე რომ ესა თუ ის ზოგადი დებულება გამოჰყავთ მხოლოდ რამდენიმე კერძო შემთხვევის განხილვის საფუძველზე. ისტორიამ შემოგვინახა დიდი **ეილერის** გამონათქვამი: „არავითარი სხვა დასკვნები დამტკიცებისათვის არა მაქვს, გარდა გრძელი ინდუქციისა, რომელიც ისე შორს ჩავატარე, რომ არასგზით არ შემიძლია ეჭვი შევიტანო კანონში, რომელიც ამ წევრების წარმოქმნას განაგებს... შეუძლებლად მეჩვენება, რომ კანონი როგორც აღმოჩენილი იყო, სრულდებოდეს, მაგალითად, ოცი წევრისათვის და არ შეინიშნებოდეს მომდევნოებისთვისაც".*

*სჯეროდათ რა ინდუქციის შეუმცდარობა, მეცნიერები ზოგჯერ უხეშ შეცდომებს უშვებდნენ. მე-17 საუკუნის შუა წლებისათვის მათემატიკაში დაგროვდა არც თუ ისე ცოტა მცდარი დასკვნები. მეტად საჭირო გახდა მოთხოვნილება მეცნიერულად დასაბუთებული ისეთი მეთოდისა, რომლის მიხედვით შესაძლებელი გახდებოდა ზოგადი დასკვნების გაკეთება რამდენიმე კერძო შემთხვევის განხილვის საფუძველზე. ასეთი მეთოდი, მართლაც შემუშავდა. მთავარი დამსახურება ამაში ეკუთვნის ფრანგ მათემატიკოსებს **პასკალსა** (1623-1662წწ.) და **დეკარტს**, აგრეთვე შვეიცარიელ მათემატიკოსს **იაკობ ბერნულის.***

სავარჯიშოები:

1. მოცემულ წინადადებათაგან რომელია ზოგადი და რომელი კერძო?

ა) რიცხვი 16 ლუწია;
ბ) ყოველი რიცხვი რომელიც მთავრდება ციფრით 6, ლუწია.
გ) ნებისმიერი კუთხის სინუსი აბსოლუტური მნიშვნელობით არ აღემატება 1-ს;
დ) 500 კუთხის სინუსი 1-ზე ნაკლებია;
ე) -2 რიცხვის ათობითი ლოგარითმი არაა განსაზღვრული.;
ვ) უარყოფით რიცხვებს ათობითი ლოგარითმი არ აქვს.

2. რიცხვები 24, 64, 104 იყოფა 4-ზე. ამის საფუძველზე შეიძლება თუ არა ითქვას, რომ ნებისმიერი რიცხვი რომელიც მთავრდება ციფრით 4, იყოფა 4-ზე?

3.45° და 60° კუთხის სინუსი ირაციონალურია. შეიძლება თუ არა აქედან დავასკვნათ, რომ ნებისმიერი კუთხის სინუსი ირაციონალურია?

§ 1.2. ინდუქცია. სრული და არასრული ინდუქცია

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ნებისმიერ მათემატიკურ გამოკვლევას საფუძვლად უდევს **დედუქციური ან ინდუქციური მეთოდი.**

დედუქცია არის მსჯელობის მეთოდი, როდესაც ზოგადი დასკვნიდან ხდება გადასვლა კერძო შემთხვევაზე.

მაგ: ABCD პარალელოგრამში $\angle A=37^0$ იპოვე $\angle C$. რადგან პარალელოგრამში მოპირდაპირე კუთხეები ტოლია, ამიტომ $\angle A=\angle C=37^0$.

ამ ამოცანის ამოსახსნელად გამოყენებულია დედუქციის მეთოდი.

ინდუქცია არის მსჯელობის მეთოდი, როდესაც კერძო მაგალითებიდან ხდება ზოგადი დასკვნის გამოტანა.

მაგალითი 1. შეიძლება თუ არა 4-დან 20-ის ჩათვლით, ყველა ლუწი რიცხვის წარმოდგენა ორი მარტივი რიცხვის ჯამის სახით?

ჩამოვწეროთ ლუწი რიცხვები 4-დან 20-მდე

$4=2+2$; $6=3+3$; $8=5+3$; $10=7+3$; $12=7+5$; $14=7+7$; $16=13+3$; $18=13+5$; $20=17+3$;

აქედან გამოგვაქვს დასკვნა: ყოველი n ლუწი რიცხვი სადაც $4 \le n \le 20$ შესაძლებელია წარმოვადგინოთ ორი მარტივი რიცხვის ჯამის სახით. აქ ზოგადი დასკვნა გამოვიტანეთ ცხრა კერძო შემთხვევის განხილვით, მსჯელობის ასეთი მეთოდი არის **სრული ინდუქცია.**

ზოგჯერ ზოგადი დასკვნა გამოგვაქვს არა ყველა, არამედ რამდენიმე (შეიძლება ბევრი, მაგრამ არა ყველა) კერძო შემთხვევის განხილვის შედეგად – ეს კი **არასრული ინდუქციაა.**

მაგალითი 2. არსებობს თუ არა ისეთ ნატურალური n რიცხვი, რომ $991n^2+1$ სახის რიცხვი იყოს სრული კვადრატი?

n=1, 2, 3, 4, 5, 6, -თვის ასეთი სახის რიცხვები (გამოთვალეთ!) არ არის სრული კვადრატი, ამიტომ ბუნებრივია, რომ გამოითქვას ვარაუდი: (ჰიპოთეზა) არც ერთი ნატურალური n-სთვის ასეთი სახის რიცხვი არ არის სრული კვადრატი. მაგრამ გამოთვლითი მანქანის საშუალებით მოიძებნა ისეთი 29-ნიშნა რიცხვი $991n^2+1$ სახისა, რომ იგი აღმოჩნდა სრული კვადრატი. (ე.ი. ვარაუდი არასწორი აღმოჩნდა)

მაგალითი 3. ერთ ქვეყანაში მიმოქცევაში მხოლოდ სამლარიანი და ხუთლარიანი კუპიურებია. დაამტკიცეთ, რომ ასეთი კუპიურებით შესაძლებელია შევიძინოთ ნებისმიერი ნივთი, რომლის ღირებულება 7 ლარზე მეტია.

$8=3+5$, $9=3\cdot3$, $10=2\cdot5$, $11=5+2\cdot3$, $12=3\cdot4$, - - -

თუ ასეთი ხერხით შეამოწმებთ კიდევ ბევრ ისეთ რიცხვს მოძებნით, რომელთათვისაც დებულება სწორი იქნება. შესაძლებელია, გამოითქვას ვარაუდი(ჰიპოთეზა), მოცემული დებულების სამართლიანობის შესახებ. (შემდეგ პარაგრაფში დავამტკიცებთ, რომ ჰიპოთეზა სწორია).

განხილულ მაგალითებში პირველის გარდა ზოგადი დასკვნა გამოვიტანეთ იმის საფუძველზე, რომ ეს დებულება ჭეშმარიტი იყო n-ის ზოგიერთი მნიშვნელობისათვის. მე-3-ე მაგალითის გარდა ყველგან მოიძებნა კონტრმაგალითი, რომელმაც საშუალება მოგვცა მივმხვდარიყავით, რომ გამოთქმული ვარაუდი მცდარია, მესამე მაგალითში ასეთი კონტრმაგალითი ვერ მოვძებნეთ, გვაქვს თუ არა იმის უფლება, რომ ეს დებულება ჩავთვალოთ სამართლიანად?

ამრიგად, თუ მსჯელობაში დასკვნა რამდენიმე მაგალითის განხილვის შემდეგ კეთდება, რომლებიც ყველა შესაძლო შემთხვევას არ მოიცავს, ეს არასრული ინდუქციაა, რომელმაც შეიძლება მცდარ დასკვნამდე მიგვიყვანოს, მაგრამ იმითაა სასარგებლო, რომ საშუალებას გვაძლევს ჩამოვაყალიბოთ ჰიპოთეზა, რომელიც შემდგომ უნდა დავამტკიცოთ ან უარვყოთ.

თუ დასკვნა ყველა შემთხვევის განხილვის საფუძველზე კეთდება, მაშინ ეს სრული ინდუქციაა და მიღებული დასკვნა საიმედოა. ცხადია, რომ ეს მაშინ გამოიყენება, როცა შემთხვევათა რიცხვი სასრულია (და არ არის "მეტისმეტად დიდი").

მოცემულია n შესაკრებისაგან შედგენილი ჯამი, $1^3+2^3+3^3+...+n^3$ რომელიც შედგება n რაოდენობის შესაკრებისაგან, ამასთან k-ური შესაკრები ტოლია k^3. ასეთი ჯამი ჩაიწერება

$$\sum_{1}^{n} k^3$$

სახით, სადაც $\sum$ არის ბერძნული ასო „სიგმა“.

n ცალი თანამამრავლის ჩასაწერად კი გამოიყენება:

$$\prod_{1}^{n} A(k)$$

სიმბოლო, (ბერძნული ასო „პი“),

მაგალითად:

$$\left(1+\frac{1}{1^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)*\dots*\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=\prod_{1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$$

შევნიშნოთ, რომ

$$\sum_{k=1}^{n+1} A(k)=\left(\sum_{k=1}^{n} A(k)\right)+A(n+1)$$

$$\prod_{k=1}^{n+1} A(k)=\left(\prod_{k=1}^{n} A(k)\right)\cdot A(n+1).$$

სავარჯიშოები:

1. $S_n = -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + . . . + (-1)^n$ ამ ფორმულის მიხედვით გამოთვალეთ:

ა) S_{316} ბ) S_{527}

2. დაამტკიცეთ, რომ ყოველი ნატურალური რიცხვი n, სადაც $n \in [1;15]$, ან მარტივია, ან გამოისახება არა უმეტეს სამი მარტივი რიცხვის ნამრავლის სახით.

3. დაამტკიცეთ, რომ $\forall x \in R$ მართებულია უტოლობა $|x| + x \geq 0$

4. დაამტკიცეთ, რომ თუ a და b რიცხვებიდან არც ერთი არ არის სამის ჯერადი, მაშინ მათი კვადრატების ჯამის სამზე გაყოფისას მიიღება ნაშთი ორი.

5. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი a და b რიცხვებისათვის მართებულია უტოლობა

$|a+b| \leq |a|+|b|$ (მითითება: განიხილეთ შემთხვევები, როცა a და b ერთნაირნიშნიანია, სხვადასხვანიშნიანია და ერთ-ერთი ნულია).

6. მოცემულია სიბრტყეზე მდებარე n სხვადასხვა წრფე, რომლებიც ერთ წერტილზე გადიან. გამოთქვით ვარაუდი, რამდენ ნაწილად გაიყო სიბრტყე?

7. დაამტკიცეთ, რომ x^2+y^2 გამოსახულების მნიშვნელობა, სადაც $x \in Z$, $y \in Z$, არ შეიძლება იყოს რიცხვი რომელიც 4-ზე გაყოფისას ნაშთში სამს იძლევა. (მითითება: განიხილეთ შემთხვევები, როცა x და y ორივე ლუწია, ორივე კენტია და ერთი კენტია , მეორე ლუწია)

8. იპოვეთ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვის კვადრატის 3-ზე გაყოფით მიღებული ნაშთები.

9. გამოიყენეთ არასრული ინდუქცია და ვარაუდით იპოვეთ S_n - ის ფორმულა თუ:

ა) $S_n = (1-\frac{1}{2})\left(1-\frac{1}{3}\right)(1-\frac{1}{4})\cdot . . . \cdot(1-\frac{1}{n+1})$

ბ) $S_n = \frac{1}{1\bullet 2} + \frac{1}{2\bullet 3} + . . . + \frac{1}{n(n+1)}$

გ) $S_n = 1\bullet 4 + 2\bullet 7 + 3\bullet 10 + . . . + n(3n+1)$

დ) $S_n = 1\bullet 1! + 2\bullet 2! + 3\bullet 3! + . . . + n\bullet n!$

10. დაამტკიცეთ, რომ იმ მართკუთხა სამკუთხედში, რომლის გვერდები ნატურალური რიცხვებით გამოისახება, ერთერთი კათეტის სიგრძე 3-ის ჯერადია. (გამოიყენეთ მე–4-ე და მე–8-ე ამოცანები)

11. დაამტკიცეთ, რომ $\forall n \in N$ $(n^5-n) \vdots 30$

12. ჯამის სახით ჩაწერეთ შემდეგი გამოსახულებები:

ა) $\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k}$ ბ) $\sum_{k=1}^{4}k^2$ გ) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ დ) $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k^4}$

13. ჩაწერეთ ჯამი $\sum$ ნიშნის გამოყენებით:

ა) $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{4\cdot5\cdot6}$;

ბ) $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$;

14. ჩაწერეთ ნამრავლი $\prod$ ნიშნის გამოყენებით⋯:

ა) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{10}$; ბ) $\left(1-\frac{1}{2^3}\right)\left(1-\frac{1}{3^3}\right)\left(1-\frac{1}{4^3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^3}\right)$

15. ჩაწერეთ შემდეგი გამოსახულებები ნამრავლის სახით:

1) $\prod_{k=1}^{5}\frac{k}{2k+1}$; 2) $\prod_{k=1}^{6}\left(1+\frac{1}{k^3}\right)$; 3) $\prod_{k=1}^{6}\left(\frac{k^3-1}{k^3+1}\right)$ 4) $\prod_{k=1}^{n}k^2$.

§ 2. მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი

გამოვთვალოთ ჯამი $s_n=1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!$

$s_1=1\cdot 1!=1$

$s_2=1\cdot1!+2\cdot2!=5$

$s_3=1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!=23$

$s_4=1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+4\cdot4!=119$

თუ დავუკვირდებით მიღებულ შედეგებს, შევნიშნავთ, რომ

$S_1=2!-1$, $s_2=3!-1$, $s_3=4!-1$, $s_4=4!-1$, შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ ჰიპოთეზა, რომ $s_n=(n+1)!-1$ სამართლიანია თუ არა მიღებული შედეგი ნებისმიერი ნატურალური n-სათვის?

ამრიგად, ჩვენს წინაშეა პრობლემა: თუ დებულება სამართლიანია რამდენიმე კერძო შემთხვევაში (ყველა კერძო შემთხვევის განხილვა შეუძლებელია) როგორ დავადგინოთ სამართლიანია თუ არა ეს დებულება საზოგადოდ.

ერთერთი უნივერსალური მეთოდი, რომლის საშუალებითაც მტკიცდება ისეთი მათემატიკური წინადადებები, რომლებშიც ფიგურირებს ფრაზა “n-ის ნებისმიერი ნატურალური მნიშვნელობისათვის”, არის მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი.

მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით დამტკიცების თვალსაჩინოდ წარმოდგენისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ ეგრეთ წოდებული **დომინოს პრინციპი**. ნებისმიერი რაოდენობის დომინოს ქვას თუ ისე განვალაგებთ, რომ ყოველი ქვის დაცემა იწვევდეს მისი მომდევნო ქვის დაცემას, (ამაშია სწორედ ინდუქციის პრინციპიც), მაშინ, თუ წავაქცევთ პირველ ქვას (მოიაზრება ინდუქციის I საფეხური - ბაზა), მას მოყვება ქვების მთელი რიგის წაქცევა.

ჩამოვაყალიბოთ **მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი**, რომელზედაც დამყარებულია მტკიცებათა მეთოდი, რომელსაც **მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი ეწოდება.**

თუ მოცემულია A(n) გამონათქვამთა მიმდევრობა(n ნატურალური რიცხვია), რომელიც ჭეშმარიტია n=1-სათვის და იქიდან, რომ იგი ჭეშმარიტია n=k–სათვის ($k \in N$) გამომდინარეობს მისი ჭეშმარიტება მომდევნო n=k+1-სათვის, მაშინ A(n) დებულება ჭეშმარიტი იქნება ნებისმიერი ნატურალური n-სათვის.

მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით დამტკიცება ორი ნაწილისაგან შედგება:

I. ამტკიცებენ (ამოწმებენ) A(1)-ის ჭეშმარიტებას.

II. ვარაუდობენ, რომ A(n) ჭეშმარიტია n=k –სათვის და აქედან გამომდინარე ამტკიცებენ მის ჭეშმარიტებას n=k +1-სათვის ე. ი. ამტკიცებენ რომ A(k) => A(k+1) ჭ.

თუ დამტკიცების ორივე ნაწილი ჩატარებულია, მაშინ მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის საფუძველზე A(n)წინადადება ჭეშმარიტი იქნება ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის.

I საფეხურს ინდუქციის ბაზისი ეწოდება, II საფეხურს – ინდუქციური ბიჯი.

მტკიცების I ნაწილი ქმნის ბაზას ინდუქციისათვის. II ნაწილი იძლევა საშუალებას შეუზღუდავად, ავტომატურად გავაფართოვოთ ეს ბაზა და გადავიდეთ მოცემული კერძო შემთხვევიდან მის შემდეგზე - **n-დან n+1-ზე.**

დავამტკიცოთ მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი.

მოც: A(n) გამონათქვამთა მიმდევრობა სადაც, $n \in N$.

I. **A(1) ჭ**
II. **A(k) => A(k+1) ჭ**

უ.დ. A(n) ჭეშმარიტია $\forall n \in N$

დამტკიცება: დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ A(n) არ არის ჭეშმარიტი ყოველი ნატურალური n–სათვის ე.ი. არსებობს ისეთ ნატურალური რიცხვი, რომ A(n) მცდარია. იმ ნატურალური რიცხვების სიმრავლე, რომელთათვისაც A(n) მცდარია აღვნიშნოთ B-თი

$B \equiv \{ n \in N \mid A(n)$ მცდარია $\}$

$1 \notin B$ I-ის თანახმად. B არის ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის არაცარიელი ქვესიმრავლე, მისი უმცირესი ელემენტი აღვნიშნოთ m-ით, ცხადია, A(m) მცდარია გამოდის რომ A(1), A(2),- - - A(m-1) ჭეშმარიტია, ხოლო A(m) მცდარია, ეს კი ეწინააღმდეგება II-ს, რომლის თანახმად ყოველ ჭეშმარიტ გამონათქვამს ჭეშმარიტი გამონათქვამი მოსდევს, რადგან A(m-1) ჭეშმარიტია, A(m) –იც ჭეშმარიტი უნდა იყოს. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს თეორემას.

ამ თეორემის დამტკიცებისას გამოვიყენეთ ის ფაქტი, რომ ნატურალურ რიცხვთა ყოველ არაცარიელ ქვესიმრავლეში არსებობს უმცირესი რიცხვი. რიცხვთა ნებისმიერ სიმრავლეს ეს თვისება არ აქვს. მაგალითად, არც მთელ რიცხვთა სიმრავლეში, არც რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში, არც]3;5[სიმრავლეში უმცირესი რიცხვი არ არსებობს, მაგრამ ვერ დავასახელებთ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის ისეთ ქვესიმრავლეს რომელსაც უმცირესი ელემენტი არ აქვს. ის რომ ვერ აღმოვაჩინეთ ასეთი ქვესიმრავლე არ ნიშნავს, რომ ჭეშმარიტია გამონათქვამი:

“ნატურალურ რიცხვთა ნებისმიერ არაცარიელ ქვესიმრავლეში უმცირესი რიცხვი არსებობს” $\equiv \alpha$

თუ მათემატიკური ინდუქციის პრინციპს ჩავთვლით აქსიომად, მაშინ შეიძლება დამტკიცება იმისა, რომ α ჭეშმარიტია, ე.ი. ეს ორი გამონათქვამი ტოლფასია.

ჯგუფური: დაამტკიცეთ, რომ თუ მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი ჭეშმარიტია, მაშინ ჭეშმარიტია α გამონათქვამი.

დავუბრუნდეთ ამ პარაგრაფის დასაწყისში განხილულ სავარჯიშოს და მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის გამოყენებით დავამტკიცოთ, რომ $\forall n \in N$

$s_n=1\bullet 1!+2\bullet 2!+3\bullet 3!+\ldots+n\bullet n!=(n+1)!-1$ ეს გამონათქვამი აღვნიშნოთ A(n)-ით

I. როცა n=1 ჰიპოთეზა სწორია $s_1=(1+1)!-1=1$ A(1) ჭეშმარიტია.

II. დავუშვათ, როცა n=k მაშინ $s_k=(k+1)!-1$ ჭეშმარიტია, დავამტკიცოთ, რომ როცა n=k+1 მაშინ $s_{k+1}=(k+2)!-1$

$$S_{k+1}=1\bullet 1!+2\bullet 2!+3\bullet 3!+\ldots+k\bullet k!+(k+1)(k+1)!=s_k+(k+1)(k+1)!=(k+1)!-1+(k+1)(k+1)!=$$
$$=(k+1)!(k+2)-1=(k+2)!-1$$

ე.ი. A(k)=> A(k+1) ჭეშმარიტია. ამიტომ (I –II)=> $\forall n\in N$ A(n) ჭეშმარიტია.

მაგალითი1. დავამტკიცოთ, რომ $\forall n \in N \ \frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $\left(\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}\right) \equiv A(n)$

I. როცა n=1 $\left(\frac{1^2}{1\cdot 3}=\frac{1(1+1)}{2(2\cdot 1+1)}\right) \Rightarrow A(1)$ ჭ

II. დავუშვათ, როცა n=k $s(k)=\frac{1^2}{1\cdot 3}+\ldots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}$ ჭ

უ.დ. რომ როცაn=k+1 $S(k+1)=\frac{1^2}{1\cdot 3}+\ldots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{(\square+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}$ ჭ

$$S(k+1)=S(k)+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)(k(2k+3)+2k+2)}{2(2k+1)(2k+3)}$$
$$=\frac{(K+1)((2k+1)(k+2)}{2(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}$$

ე.ი. A(k)=> $A(k+1)$ ჭ ამიტომ (I და II) => $\forall n \in N \ A(n)$ ჭ

მაგალითი 2. დავამტკიცოთ გეომეტრიული პროგრესიის ზოგადი წევრის ფორმულა

მოც: ∺ (b_n) b_1; $b_{n+1} = b_n \cdot q$

უ.დ. $b_n = b_1 q^{n-1}$

I. როცა $n=1$ $b_1 = b_1 q^{1-1}$ ჭ

II. დავუშვათ, როცა $n=k$ $b_k = b_1 q^{k-1}$ ჭ უ.დ. როცა $n=k+1$ მაშინ $b_{k+1} = b_1 q^k$ ჭ. განმარტების თანახმად $b_{k+1} = b_k q = b_1 q^{k-1} q = b_1 q^k$ ე.ი. I და II პირობა შესრულებულია, ამიტომ $\forall\ n \in N$ $b_n = b_1 q^{n-1}$ ჭ.

შევნიშნოთ, რომ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით დამტკიცება აუცილებლად საჭიროებს ორივე (I და II) ნაწილის შემოწმებას. ვაჩვენოთ, რომ არ შეიძლება არც ერთი ნაწილის გამოტოვება. არ უნდა ვიფიქროთ, რომ პირველი საფეხური ნაკლებად მნიშვნელოვანია, ვიდრე მეორე. ახლა მოვიყვანოთ მაგალითი, რომელიც გვაჩვენებს, თუ რა უაზრო დასკვნამდე შეიძლება მივიდეთ, თუ უგულებელვყობთ პირველ საფეხურს.

მოვიყვანოთ მაგალითი მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის არასწორი გამოყენებისა. „დავამტკიცოთ“ შემდეგი არასწორი „თეორემა“:

„თეორემა“: ნებისმიერი ნატურალური *n*-თვის რიცხვი 2n+1 ლუწია.

მართლაც, თუ დავუშვებთ, რომ „თეორემა“ სამართლიანია $n=k$ – თვის (ე. ი. $2k+1$ ლუწი რიცხვია) და განვიხილავთ $k+1$- თვის: $2(k+1)+1 = (2k+1)+2$.

პირობის თანახმად $2k+1$ ლუწია და ამიტომ, თუ მას ლუწ რიცხვს 2-ს დავუმატებთ, ისევ ლუწ რიცხვს მივიღებთ. „თეორემა“ დამტკიცებულია.

ცხადია, ინდუქციის მხოლოდ მეორე ეტაპის დამტკიცებით მივიღეთ არასამართლიანი დებულება. რომ არ დაგვიწყებოდა შემოწმება, მართებულია თუ არა „თეორემა“ , როცა $n=1$, მაშინ არ მივიდოდით ასეთ „შედეგამდე“.

როგორც ვხედავთ, ორივე საფეხური მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით დამტკიცებისას ერთნაირად მნიშვნელოვანია.

მაგალითი 3. ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი მომდევნო ნატურალური რიცხვის ტოლია. ე.ი. $\forall\ n \in \mathbf{N}$ $n=n+1$

“დამტკიცება”: დავუშვათ, რომ თეორემა სამართლიანია ნებისმიერი $n=k$-თვის ე.ი. $k=k+1$ ჭ– (1) დავამტკიცოთ, რომ თეორემა სამართლიანი იქნება $n=k+1$-თვის ანუ $k+1=k+2$ მართლაც, თუ (1) ტოლობის ორივე მხარეს დავუმატებთ ერთს მივიღებთ $k+1=k+2$, ამიტომ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის საფუძველზე შეიძლება დავასკვნათ, რომ $\forall n \in N$ თეორემა სამართლიანია.

მოყვანილ მსჯელობაში შეცდომა არის ის, რომ არ შემოწმებულა I. ნაწილი, ანუ ინდუქციის ბაზისი. რადგან, როცა $n=1$ „თეორემა“ მცდარია $1 \neq 2$.

ამ პარაგრაფის დასაწყისში განხილული ჯამის გამოთვლისას განვიხილეთ რამდენიმე კერძო ჯამები , გამოვთქვით ჰიპოთეზა, შემდგომ დავამტკიცეთ მისი სამართლიანობა და ჰიპოთეზა სწორი აღმოჩნდა, მაგრამ თუ მცდარ ჰიპოთეზას ჩამოვაყალიბებთ, მაშინ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის II ნაწილი მის მცდარობას აუცილებლად გვიჩვენებს. განვიხილოთ შესაბამისი მაგალითი

$\mathbf{S_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+...+\frac{1}{n(n+1)}}$ დავუშვათ, ამ ჯამის გამოთვლისას ჩამოვაყალიბეთ ჰიპოთეზა: $\mathbf{s(n)=\frac{n+1}{3n+1}}$ **– (1)** შევამოწმოთ მისი სამართლიანობა მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით

I. როცა n =1 (1) ფორმულიდან გვაქვს $S_1=\frac{1+1}{3\cdot1+1}=\frac{1}{2}$. მართლაც $S_1=\frac{1}{1\cdot2}=\frac{1}{2}$

II. დავუშვათ, რომ როცა n=k, მაშინ $S_k=\frac{k+1}{3k+1}$; დავამტკიცოთ, რომ როცა n=k+1. მაშინ $s_{k+1}=\frac{k+2}{3k+4}$; გვაქვს $S_{k+1}=S_k+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{3k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^3+4k^2+8k+2}{(k+1)(k+2)(3k+1)}$ მივიღეთ სხვა შედეგი ე.ი. როცა (1) ფორმულა ჭეშმარიტია n=k –თვის, მაშინ არ გამომდინარეობს მისი ჭეშმარიტება n=k+1-თვის. ამიტომ (1) ფორმულა არასწორია.
მაშასადამე, მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი საშუალებას გვაძლევს, ზოგადი დებულების ძებნისას გამოთქმული სწორი ჰიპოთეზა დავამტკიცოთ ან მცდარი უარვყოთ.

მაგალითი 4. დავამტკიცოთ, რომ

$$\mathbf{1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}\ . \qquad (1)$$

ამოხსნა. 1) შევამოწმოთ, რომ დებულება სამართლიანია n=1-სათვის. მართლაც $1^2=\frac{1\cdot(1+1)(2+1)}{6}$, საიდანაც 1=1.

დავუშვათ, რომ (1) ტოლობა სრულდება n=k - სათვის. ე.ი. დავამტკიცოთ, რომ სამართლიანია ტოლობა $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$. (2)

დავამტკიცოთ, რომ დებულება სამართლიანია n=k+1 – სთვის, ე.ი. დავამტკიცოთ, რომ სამართლიანია ტოლობა

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\ . \qquad (3)$$

მართლაც,

$$(1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+k^2)+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=$$

$$\frac{(k+1)(k(2k+1)+6(k+1))}{6}=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}=\frac{(k+1)(2k^2+4k+3k+6)}{6}$$
$$=\frac{(k+1)(2k(k+2)+3(k+2))}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

ე.ი. (2) ტოლობიდან გამომდინარეობს (3) ტოლობა. მაშასადამე, მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის თანახმად (1) ტოლობა სამართლიანია ნ-ის ნებისმიერი ნატურალური მნიშვნელობისთვის.

მაგალითი 5. განვიხილოთ პირველი n ნატურალური რიცხვის კუბების ჯამი:

$1^3 = 1 = 1^2$;

$1^3 + 2^3 = 9 = (1+2)^2$;

$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = (1+2+3)^2$;

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = (1+2+3+4)^2$;

ცხადია ვივარაუდოთ, რომ

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n)^2.$$

შევამოწმოთ ეს ჰიპოთეზა, მაგალითად, ხუთი და ექვსი შესაკრების შემთხვევაში:

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225 = 15^2 = (1+2+3+4+5)^2$;

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = 441 = 21^2 = (1+2+3+4+5+6)^2$.

ჰიპოთეზა ამ შემთხვევაშიც სამართლიანია.

მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებთ დავამტკიცოთ, რომ დებულება სამართლიანია n-ის ნებისმიერი ნატურალური მნიშვნელობისათვის. ე.ი.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n)^2 . \qquad (4)$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. 1) ამ ტოლობის სამართლიანობა უკვე ვაჩვენეთ n=1-სთვის (უფრო მეტიც, როცა n=2,3,4,5,6).

დავუშვათ, რომ ტოლობა სრულდება როცა n=k, ე.ი. დავუშვათ,რომ სამართლიანია ტოლობა

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + k^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k)^2 . \qquad (5)$$

დავამტკიცოთ, რომ მაშინ (4) ტოლობა სამართლიანი იქნება როცა n=k+1. ე.ი. დავამტკიცოთ,რომ სამართლიანია ტოლობა

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k + (k+1))^2.$$

ანუ, რაც იგივეა,

$$(1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k + (k+1))^2 - (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + k^3) = (k+1)^3. \qquad (6)$$

თუ (6) ტოლობის მარცხენა ნაწილში კუბების ჯამს შევცვალით (5) ტოლობის მარჯვენა ნაწილით, მივიღებთ:

$(1+2+3+4+\cdots+k+(k+1))^2-(1+2+3+4+\cdots+k)^2=\Big((1+2+3+4+\cdots+k+(k+1))-(1+2+3+4+\cdots+k)\Big)\Big((1+2+3+4+\cdots+k+(k+1))+(1+2+3+4+\cdots+k)\Big)=(k+1)(2(1+2+3+\cdots+k)+(k+1))=(\mathrm{k}+1)(2\cdot\frac{1+k}{2}\cdot\mathrm{k}+(\mathrm{k}+1))=(\mathrm{k}+1)(k^2+2\mathrm{k}+1)=(\mathrm{k}+1)(k+1)^2=(k+1)^3.$

მაშასადამე (5) ტოლობიდან გამომდინარეობს (6) ტოლობა.

მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის ორივე პირობა სრულდება, მაშასადამე (4) ტოლობა სამართლიანია ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისთვის.

სავარჯიშოები:

1. მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით შეამოწმეთ სწორია, თუ არა წინა პარაგრაფის მე-9-ე სავარჯიშოში გამოთქმული თქვენი ვარაუდი.

2. გამოიყენეთ, არასრული ინდუქცია და ვარაუდით იპოვეთ S_n-ის ფორმულა, შეამოწმეთ თქვენი ვარაუდი მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით:

ა) $S_n=-1+3-5+7-9+\ldots+(-1)^n(2n-1)$

ბ) $S_n=\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\frac{1}{9\cdot13}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$

გ) $S_n=(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{1}{(n+1)^2})$

3. მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ $\forall n\in N$ მართებულია ტოლობა

ა) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ბ) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

გ) $1\cdot2+2\cdot3++3\cdot4+\ldots n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{4}$

დ) $1\cdot2+2\cdot5+3\cdot8+\cdots+n\cdot(3n+1)=n^2(n+1)$;

ე) $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$

ვ) $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$

ზ) $(1-\frac{1}{2})\cdot(1-\frac{1}{3})\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}$

თ) $(1-\frac{4}{1})(1-\frac{4}{9})(1-\frac{4}{25})\cdots(1-\frac{4}{(2n-1)^2})=\frac{1+2n}{1-2n}$;

ი) $1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\frac{1}{30}\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)(2\mathrm{n}+1)(3n^2+3n-1)$;

კ) $1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5=\frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$;

ლ) $1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

4. (a_n) მიმდევრობა მოცემულია რეკურენტულად:

ა) $a_1=4$ და $a_{n+1} = 3a_n-2$. დაამტკიცეთ, რომ $a_n=3^n+1$

ბ) $a_1=1$ და $a_{n+1}=a_n-\frac{1}{n(n+1)}$. დაამტკიცეთ, რომ $a_n=\frac{1}{n}$

გ) $a_1=1$ და $a_{n+1}=3a_n++2^n$. დაამტკიცეთ, რომ $a_n = 3^n-2^n$

5. (a_n) მიმდევრობა მოცემულია რეკურენტულად:

ა) $a_1=1$ და $a_{n+1}= a_n(n+1)$ იპოვეთ a_n.

ბ) $a_1=2$ და $a_{n+1}=\frac{n+2}{2}a_n$ იპოვეთ a_n.

გ) $a_1=1$ და $a_{n+1}=a_n-\frac{1}{n(n+1)}$ იპოვეთ a_n.

დ) $a_1=\frac{2}{3}$ და $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(n+2)(n+3)}$ იპოვეთ a_n.

7. დაამტკიცეთ, რომ $\forall n \in N$:

ა) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$

ბ) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$

გ) $\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{2}{3\cdot 5\cdot 7}+\ldots+\frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}$

ე) $\frac{1\cdot 8}{4\cdot 7}+\frac{2\cdot 11}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{n(3n+5)}{(3n+1)(3n+4)}=\frac{n(n+1)}{3n+4}$

8. (a_n) ფიბონაჩის მიმდევრობაა, დაამტკიცეთ, რომ

ა) $a_{n+3}=a_1+a_2+\ldots+a_{n+1}+1$

ბ) $a_{2n+2}=a_3+a_5+\ldots+a_{2n+1}+1$

გ) $a_{2n+4}=a_2+a_3+\ldots+a_{2n+3}+1$

დ) $a_{n+10}=a_n\cdot a_9+a_{n+1}\cdot a_{10}$

9. მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ $\forall n \in N$ მართებულია ტოლობა

ა) $\frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}=1-\frac{1}{n!}$

ვ) $\frac{1}{2}\cdot 2!+\frac{2}{2^2}\cdot 3!+\ldots+\frac{n}{2^n}(n+1)!=\frac{(n+2)!}{2^n}-2$

ზ) $3+20+168+\ldots+(2n+1)\cdot 2^{n-1}\cdot n! =2^n\cdot(n+1)!-1$

თ) $4+60+\ldots+(n+1)(3n-1)\cdot 4^{n-1}=n^2\cdot 4^n$

თ) $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+3\cdot 4^2+\ldots+(n-1)n^2=\frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$

ი)* $33 + 333 + \ldots + \overbrace{33\ldots3}^{n} = \frac{10^{n+1}-9n-10}{27}$

10. დაამტკიცეთ, რომ $\forall n \in N$; ა) $1-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$

ბ) $2\cdot1^2+3\cdot2^2+\ldots+n(n-1)^2+(n+1)n^2=\frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{1\cdot3\cdot4}$

დ) $(n+1)(n+2)\ldots(n+n)=2^n\cdot1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)$

11. დაამტკიცეთ, რომ $\forall n \in N$

ა) $(x-\frac{1}{x})^2+(x^2-\frac{1}{x^2})^2+\ldots+(x^n-\frac{1}{x^n})^2=\frac{1}{x^2-1}(x^{2n+2}-\frac{1}{x^{2n}})-2n-1$; $x\neq 0; \pm1$;

ბ) $\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\ldots+\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\frac{n}{a(a+n)}$; $a \in N$

გ) $\frac{a+1}{2}+\frac{a+3}{4}+\frac{a+7}{8}+\ldots+\frac{a+2^n-1}{2^n}=\frac{(a-1)(2^n-1)}{2^n}$; $a \in N$

§ 4. მათემატიკური ინდუქცია და გაყოფადობა

მაგალითი 1. დაამტკიცეთ, რომ სამი მომდევნო ნატურალური რიცხვების კუბების ჯამი იყოფა 9-ზე

ე.ი. უნდა დავამტკიცოთ, რომ $\forall n \in N$ $(n^3+(n+1)^3+(N+2)^3)\vdots 9$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $((n^3+(n+1)^3+(n+2)^3)\vdots 9) \equiv A_n$

I. როცა $n=1$ მაშინ $(1^3+2^3+3^3)\vdots 9$ ე.ი. A_1 ჭ.

II დავუშვათ, რომ როცა $n=k$ $(k^3+(k+1)^3+(k+2)^3)\vdots 9$ ჭ.

დავამტკიცოთ, რომ როცა $n=k+1$, მაშინ $((k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3)\vdots 9$ ჭ

$(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3=(k+1)^3+(k+2)^3+k^3+9k^2+27k+27=\underline{(K^3+(k+1)^3+(k+2)^3)}+\underline{9(k^2+3k+3)}$ პირველი შესაკრები იყოფა 9-ზე დაშვების თანახმად, მეორე შესაკრებიც იყოფა 9-ზე ამიტომ ჯამიც იყოფა 9-ზე. ე .ი. $A_k \Rightarrow A_{k+1}$ ჭ

(I. და II.)$\Rightarrow \forall n\in N$ A_n ჭ.

მაგალითი 2. დავამტკიცოთ, რომ $\forall n\in N$ $\mathbf{(n^4+6n^3+11n^2+6n)\vdots 24}$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $((n^4+6n^3+11n^2+6n)\vdots 24) \equiv A_n$

I. როცა $n=1$ A_1 ჭ. (შეამოწმეთ!)

II. დავუშვათ, როცა $n=k$ $(k^4+6k^3+11k^2+6k)\vdots 24$ ჭ

უ.დ. როცა $n=k+1$ $((k+1)^4+6(k+1)^3+11(k+1)+6(k+1))\vdots 24$ ჭ

$(k+1)^4+6(k+1)^3+11(k+1)^2+6(k+1)=\underline{(k^4+6k^3+11k^2+6k)}+\underline{24(k^2+1)}+4\underline{(k^3+11k)}$ – (1)

პირველი შესაკრები დაშვებით იყოფა 24-ზე, მეორეც იყოფა 24-ზე, საჭიროა დავამტკიცოთ, რომ $\forall k \in N$ k^3+11k იყოფა 6-ზე. ამისათვის შეგვიძლია ვისარგებლოთ ისევ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით.

$((K^3+11k)\vdots 6) \equiv B_k$

I. როცა K=1 B_1 ჭ (შეამოწმეთ)

II. დავუშვათ, რომ როცა k=m $(m^3+11m)\vdots 6$ ჭ უ.დ. როცა k=m+1 $((m+1)^3+11(m+1))\vdots 6$ჭ

$(m+1)^3+11(m+1\_)=(m^3+11m)+12+3m(m+1)$ $(m^3+11m)\vdots 6$ დაშვებით, $3m(m+1)\vdots 6$ რადგან m და m+1 ერთერთი ლუწია ამიტომ $((m+1)^3+11(m+1))\vdots 6$ აქედან გვაქვს, რომ B_k ჭ $\forall k \in N$

მაშასადამე (1) გამოსახულება იყოფა 24-ზე ამიტომ A_n ჭ $\forall n \in N$

შენიშვნა , მოცემული სავარჯიშო უმჯობესია შევასრულოთ არა ინდუქციით, არამედ სხვა ხერხით, კერძოთ $n^4+6n^3+11n^2+6n$ გამოსახულება დავშალოთ მამრავლებად $n^4+6n^3+11n^2+6n=n(n+1)(n+2)(n+3)$. n, n+1, n+2, n+3 ოთხი მომდევნო ნატურალური რიცხვია, მათგან ორი აუცილებლად ლუწია, რომელთაგან ერთი იყოფა 4-ზე და ერთი 2-ზე, ამიტომ ნამრავლი გაიყოფა 8-ზე. ამას გარდა ამ ოთხი რიცხვიდან ერთერთი გაიყოფა 3-ზე ე.ი. ოთხივეს ნამრავლი გაიყოფა 24-ზე.

მაგალითი: დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისთვის $\mathbf{(11^{n+2}+12^{2n+1})} \vdots 133$

ამოხსნა: **I.** ნ=1-სათვის დებულება მიიღებს სახეს: $(11^3+12^3) \vdots 133$

ეს სამართლიანია, რადგანაც $11^3+12^3=(11+12)(11^2-11\cdot 12+12^2)=23\cdot 133$, ხოლო $(23\cdot 133) \vdots 133$.

II. დავუშვათ, რომ დებულება სამართლიანია ნ=კ -სათვის, ე.ი. დავუშვათ, რომ

$$(11^{k+2}+12^{2k+1}) \vdots 133 .$$

დავამტკიცოთ, რომ მაშინ დებულება სამართლიანი იქნება ნ=კ+1-სთვის. ე.ი. დავამტკიცოთ, რომ $(11^{k+3}+12^{2k+3}) \vdots 133$.

მართლაც, $11^{k+3}+12^{2k+3}=11\cdot 11^{k+2}+12^2\cdot 12^{2k+1}=11(11^{k+2}+12^{2k+1})+133\cdot 12^{2k+1}$.

ცხადია, რომ მეორე შესაკრები $-133\cdot 12^{2k+1}$ იყოფა 133-ზე, ხოლო პირველი შესაკრები $-11(11^{k+2}+12^{2k+1})$ იყოფა 133-ზე დაშვების თანახმად. მაშინ გაყოფადობის თვისების თანახმად

$(11(11^{k+2}+12^{2k+1})+133\cdot 12^{2k+1}) \vdots 133$, ე.ი. $(11^{k+3}+12^{2k+3}) \vdots 133$. რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.

მაგალითი 4. იყოფა თუ არა (a-b) -ზე $a \neq b$, a^n-b^n სხვაობა ყოველი ნატურალური n – თვის?

I. როცა n=1 $(a-b) \vdots (a-b)$ ჭ

II. დავუშვათ, როცა n=k მაშინ $(a^k-b^k) \vdots (a-b)$ ჭ უ.დ. როცა n=k+1 მაშინ $(a^{k+1}-b^{k+1}) \vdots (a-b)$ ჭ

$A^{k+1}-b^{k+1}= a^k(a-b)+b(a^k-b^k)$ I – შესაკრები იყოფა (a-b)-ზე, II– შესაკრებიც იყოფა დაშვების თანახმად, ამიტომ გაიყოფა ჯამიც, ე.ი. $a^{k+1}-b^{k+1}$ იყოფა (a-b) –ზე.

ე.ი. I და II პირობა შესრულდა.

მაშასადამე თუ $a \neq b$ მაშინ a^n-b^n იყოფა a - b –ზე $\forall n \in N$.

მაგალითი 5. დაამტკიცეთ, რომ რიცხვი, რომელიც შედგება 3^n რაოდენობა ერთიანისაგან, იყოფა 3^n-ზე.

ამოხსნა: $(\overbrace{\mathbf{11...1}}^{3^n} \vdots 3^n) \equiv A(n)$ `

I. როცა n =1, მაშინ $(111 \vdots 3)$ ჭ

II. დავუშვათ, რომ როცა n = k მაშინ $(\overbrace{11...1}^{3^k} \vdots 3^k)$ ჭ

უ.დ. როცა n = k +1 მაშინ $(\overbrace{11...1}^{3^{k+1}} \vdots 3^{k+1})$ ჭ

$$\overbrace{11...1}^{3^{k+1}} = \overbrace{11...1}^{3\cdot 3^k} = \overbrace{11...1}^{3^k}\overbrace{11...1}^{3^k}\overbrace{11...1}^{3^k} = \overbrace{11...1}^{3^k}\overbrace{00...0}^{3^k}\overbrace{00...0}^{3^k} + \overbrace{11...1}^{3^k}\overbrace{00...0}^{3^k} + \overbrace{11...1}^{3^k} =$$

$$= y \cdot 10^{2\cdot 3^k} + Y \cdot 10^{3^k} + y = Y(10^{2\cdot 3^k} + 10^{3^k} + 1) \vdots 3^{k+1}$$ (სადაც $y=\overbrace{11...1}^{3^k}$)

პირველი თანამამრავლი დაშვებით იყოფა 3^k–ზე, ფრჩხილში მყოფის ციფრთა ჯამია 3, ამიტომ იყოფა 3-ზე, მაშასადამე, ნამრავლი იყოფა 3^{k+1}–ზე. ე.ი. A(k) => A(k+1) ჭ

(I და II) => $\forall n \in N$ A(n) ჭ.

სავარჯიშოები:

1. დაამტკიცეთ, რომ $\forall n \in N$

ა) $(n^3 + 5n) \vdots 6$

ბ) $(7^n+3n-1) \vdots 9$

გ) $(3^{2n+2} - 8n - 9) \vdots 64$

დ) $(2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4) \vdots 25$

ე) $(6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n) \vdots 11$

ვ) $(7^{n+2} + 8^{2n+1}) \vdots 57$

ზ) $(2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}) \vdots 17$

თ) $(3^{3n+2} + 5 \cdot 2^{3n+1}) \vdots 19$

2. დაამტკიცეთ, რომ თუ $\forall n \in Z_0^+$

ა) $(2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4) \vdots 25$;   ბ) $(7^{n+2} + 8^{2n+1}) \vdots 57$;

გ) $(5^{3n+1} + 2^{n+5} \cdot 3^{4n}) \vdots 37$;   დ) $(3^{3n+2} + 5 \cdot 2^{3n+1}) \vdots 19$

3. დაამტკიცეთ, რომ $\forall n \in N$

$$\left(2^{3^n} + 1\right) \vdots 3^{n+1}$$

4. დაამტკიცეთ, რომ $\forall n, m \in N$: $(n^{2m-1} + 1) \vdots (n+1)$. (ინდუქცია m–ის მიმართ);

5.* იპოვეთ, $(a^n - b^n)$ -ის $(a-b)$ -ზე გაყოფით მიღებული განაყოფი, თუ $a \neq b$, $n \in N$.

(მითითება: გამოიყენეთ არასრული ინდუქცია)

§ 5. მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის განზოგადება

უტოლობათა დამტკიცება მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით

ზოგჯერ $A(n)$ გამონათქვამი n-ის ზოგიერთი ნატურალური მნიშვნელობისათვის ან მცდარია, ან აზრი არ აქვს, მაგრამ შესაძლებელია მისი ჭეშმარიტების დამტკიცება m–დან დაწყებული ყოველი ნატურალური n -ისათვის, ან $A(n)$ -ის დამტკიცება შესაძლებელია მთელი n -ებისათვის, დაწყებული 0 –დან ან რომელიმე მთელი უარყოფითი მნიშვნელობიდან. ასეთ შემთხვევაში ვიყენებთ მათემატიკური ინდუქცის მეთოდის განზოგადებას, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს:

თუ $A(n)$ გამონათქვამი ჭეშმარიტია $n=m$ - სათვის (და არა როცა $n=1$), $m \in Z$ და იქედან, რომ იგი ჭეშმარიტია $n=k$ –სათვის, სადაც $k \geq m$, გამომდინარეობს მისი ჭეშმარიტება მომდევნო $n = k+1$ -სათვის, მაშინ $A(n)$ ჭეშმარიტი იქნება m -ზე მეტი, ან ტოლი ყოველი მთელი n -ისთვის.

მაშასადამე , თუ $A(n)$ გამონათქვამთა მიმდევრობაა და სრულდება შემდეგი ორი პირობა:

I. $A(m)$ ჭ ($m \in Z$);

II. $A(k) \Rightarrow A(k+1)$ ჭ სადაც $k \geq m$

მაშინ $A(n)$ ჭეშმარიტია m -ზე მეტი ან ტოლი ყოველი მთელი n –სათვის.

მაგალითი 1. დავამტკიცოთ, რომ როცა $n \geq 3$ ($n \in N$) $2^n > 2n+1$

I. როცა $n=3$, მაშინ $2^3 > 7$ ჭ

II. დავუშვათ, რომ როცა n=k $k\geq 3$, მაშინ $2^k>2k+1$ჭ

უ.დ. როცა n = k+1 , მაშინ $2^{k+1}>2(k+1)+1$ ჭ

$2^{k+1}=2\cdot 2^k>2(2k+1)=4k+2=(2k+3)+(2k-1)>2k+3$ რადგან, როცა $k\geq 3$, მაშინ $2k-1>0$ ე.ი. $2^{k+1}>2(k+1)+1$ ჭ

I და II პირობა შესრულდა, ამიტომ როცა $n\geq 3$ ($n\in N$) $2^n>2n+1$.

მაგალითი 2. n–ის ($n\in N$) რა მნიშვნელობებისათვის არის ჭეშმარიტი შემდეგი უტოლობა?

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}. \quad - \quad (1)$$

როცა n =1 $1>\sqrt{1}$ მცდარია. n =2 ($1+\frac{1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}$) <=> ($\sqrt{2}>1$) ჭ. უტოლობა სწორია მაშინაც, როცა n= 3 და n= 4 (შეამოწმეთ!) შეიძლება ვივარაუდოთ, რომ უტოლობა სწორია, როცა $n\geq 2$,

შევამოწმოთ ეს ჰიპოთეზა ე.ი. დავამტკიცოთ, რომ როცა

$$n\geq 2, (n\in N) \quad \text{მაშინ} \quad 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$$

I. n =2 –თვის უკვე შემოწმებული გვაქვს ჭეშმარიტია

II. დავუშვათ, რომ როცა n=k, მაშინ $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}$ ჭ

უ.დ. როცა n=k+1 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$ ჭ ––– (2)

$1+\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$

დავამტკიცოთ, რომ $\left(\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}\right)$ <=> ($\sqrt{k^2+k}>k$)<=> ($k>0$) ე.ი. (2) უტოლობა სწორია. რადგან I და II პირობები შესრულდა, ამიტომ (1) უტოლობა ჭეშმარიტია, როცა $n\geq 2$ ($n\in N$). პასუხი: როცა $n\geq 2$ $n\in N$.

მაგალითი 3. დაამტკიცეთ, რომ როცა $h>-1$, სრულდება $(1+h)^n\geq 1+nh$

უტოლობა $\forall n\in N$. (ბერნულის უტოლობა)

($(1+h)^n\geq 1+nh$) $\equiv A(n)$

I. როცა n=1, მაშინ $1+h\geq 1+h$ ე.ი. A(1) ჭ

II. დავუშვათ, როცა n=k, მაშინ $(1+h)^k\geq 1+kh$ ჭ – (1)

უ.დ. როცა n=k+1, მაშინ $(1+h)^k\geq 1+(k+1)h$ - (2)

(1) უტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ (1+h) –ზე $1+h>0$, ამიტომ მივიღებთ

$(1+h)^{k+1}\geq 1+kh+h+kh^2\geq 1+(k+1)h$ რადგან $kh^2\geq 0$ ე.ი. (2) უტოლობა ჭეშმარიტია.

მაშასადამე A(k)=> A(k+1) ჭ. ამით ბერნულის უტოლობა დამტკიცებულია.

მაგალითი 4. **დავამტკიცოთ, რომ**

$$2^{n-1}(a^n+b^n)>(a+b)^n \qquad (1),$$

სადაც a+b>0, a≠b, n არის 1-ზე მეტი ნატურალური რიცხვი.

ამოხსნა:

როცა n=2 უტოლობა ღებულობს შემდეგ სახეს:

$2(a^2\ +b^2)>a+b)^2$ (2).

რადგან ა ბ,ამიტომ სამართლიანია უტოლობა $(a+b)^2$>0 (3).

თუ (3) უტოლობის ორივე მხარეს დავუმატებთ $(a+b)^2$-ს, მივიღებთ (2) უტოლობას. ამით დამტკიცებულია (1) უტოლობის სამართლიანობა n=2-სათვის.

ვთქვათ, (1) უტოლობა სამართლიანია n=k-სათვის, სადაც k რაღაც ნატურალური რიცხვია. ე.ი.

$$2^{k-1}(a^k+b^k)>(a+b)^k \qquad (4).$$

დავამტკიცოთ,რომ მაშინ (1) უტოლობა სამართლიანი იქნება n=k+1-სათვის. ე.ი.

$$2^k(a^{k+1}+b^{k+1})>(a+b)^{k+1} \qquad (5).$$

(4) უტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ a+b-ზე. რადგან, პირობის თანახმად, a+b>0, ამიტომ მივიღებთ შემდეგ უტოლობას:

$$2^{k-1}(a^k+b^k)(a+b)>(a+b)^{k+1} \qquad (6).$$

იმისათვის რომ დავამტკიცოთ (5) უტოლობის სამართლიანობა, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$2^k(a^{k+1}+b^{k+1})>2^{k-1}(a^k+b^k)(\,a+b)$ (7)

ან, რაც იგივეა

$a^{k+1}+b^{k+1}>a^kb+ab^k$ (8)

(8) უტოლობა ტოლფასია უტოლობის:

$(a^k-b^k)(a-b)>\ 0$ (9) მაშინ

თუ a>b, მაშინ $a^k>b^k$და (9) უტოლობის მარცხენა მხარე წარმოადგენს ორი დადებითი რიცხვის ნამრავლს,ხოლო თუ a<b, მაშინ $a^k<b^k$ კდა (9) უტოლობის მარცხენა მხარე წარმოადგენს ორი უარყოფითი რიცხვის ნამრავლს. ორივე შემთხვევაში (9) უტოლობა სამართლიანია.

ამით დამტკიცდა, რომ n=k-სათვის (1) უტოლობის სამართლიანობიდან გამომდინარეობს, რომ იგი სამართლიანია n=k+1-საც.

მაგალითი 5.

დავამტკიცოთ რომ ნებისმიერი ამოზნექილი მრავალკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი 180˚(n-2)-ის ტოლია. სადაც ნ ამ მრავალკუთხედის გვერდების რიცხვია:

$$S_n=180^\circ(n-2) \qquad (1)$$

ამ წინადადებას აზრი აქვს არა ყველა ნატურალური ნ-ისათვის, არამედ მხოლოდ $n\geq3$-ისათვის, მაგრამ შეიძლება ინდუქციის მე-2 ვარიანტის გამოყენება, რომელიც ზემოთ იყო აღწერილი.

1)$n=3$-ისათვის ჩვენი წინადადება ღებულობს სახეს $S_n=180^\circ(3-1)$, რაც სამართლიანია, რადგან ნებიმიერი სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი მართლაც 180°-ის ტოლია.

2)ვთქვათ, ეს ფორმულა მართებულია, როცა $n=k$, ე.ი. $S_k=180^\circ(k-2)$, სადაც $k\geq3$. დავამტკიცოთ, რომ ასეთ შემთხვევაში ადგილი აქვს ფორმულას $S_{k+1}=180^\circ(k-1)$.

ვთქვათ, $A_1A_2...A_kA_{k+1}$ ნებისმიერი ამოზნექილი $(k+1)$-კუთხედია. თუ შევაერთებთ A_1 და A_k წერტილებს, მივიღებთ ამოზნექილ k-კუთხედს $A_1A_2...A_{k-1}A_k$. ცხადია, $A_1A_2...A_kA_{k+1}$ $(k+1)$-კუთხედის კუთხეების ჯამი მიიღება $A_1A_2...A_k$ k-კუთხედის კუთხეების ჯამისა და $A_1A_kA_{k+1}$ სამკუთხედის კუთხეების ჯამის შეკრებით, მაგრამ $A_1A_2...A_k$ k-კუთხედის კუთხეების ჯამი, პირობის თანახმად, $180^0(k-2)$-ის ტოლია, ხოლო $A_1A_kA_{k+1}$ სამკუთხედის კუთხეების ჯამი 180^0-ის ტოლია, ამიტომ

$$S_{k+1}=S_k+180^\circ=180^\circ(k-2)+180^\circ=180^\circ(k-1).$$

მაშ, მათემატიკური ინდუქციის ორივე პირობა სრულდება და ამის გამო (1) ფორმულა მართებულია ნებისმიერი n 3-ისათვის.

სავარჯიშოები:

1. დაამტკიცეთ, რომ

ა) $2^n > n$, როცა $n \geq 0$ $n\in Z$ ბ) $2^{n+2}>2n+5$ როცა $n\geq 1$ $n\in N$

გ) $2^n>n^3$ $n\geq 10$ $n\in N$ დ) $2^n>n^2$ როცა $n\geq5$ $n\in N$

2*. დაამტკიცეთ, რომ

ა) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot...\cdot\frac{2n-1}{2n}\leq\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ $\forall n\in N.$ ბ) $18\cdot2^n>n^2+6n+11$ $n\geq -3$, $n\in Z.$

გ) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$ $n>1$, $n\in N.$ დ) $\frac{4^n}{n+1}<\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ $n>1$, $n\in N.$

ე) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{3n+1}>1$ $n\in N;$

3. დაამტკიცეთ, რომ ა) $5^n > 7n-3$; როცა $\forall n\in N$; ბ) $2^{n-1} > n(n+1)$; $\forall n\in N$ $n\geq 7$;
ე) $4^n \geq 3^n+n^2$; $\forall n\in N$; $n\geq2$ ვ) $n! > 2^{n-1}$; $\forall n\in N$ $n\geq 3$;

4. დაამტკიცეთ, რომ

ა) $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots+\sqrt{6}}}} < 3;$

ბ) $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}} < 2$

გ) $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1}$ - 2;

დ) $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$.

5. დაამტკიცეთ, რომ $\forall \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}$:

ა) $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3^n+1}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3^n+2}}+\cdots+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\cdot 3^n}} > \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$;

ბ) $\frac{1}{5^n+1}+\frac{1}{5^n+1}+\cdots+\frac{1}{2\cdot 5^n} > \frac{1}{2}$

6. დაამტკიცეთ უტოლობა $(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_n$,სადაც ყველა x_n ერთნაირი ნიშნისაა და $x_n \geq -1$, $\forall \mathrm{n} \in N$;7.

8. იპოვეთ, ა) $2^n > n$.

ბ) $2^n > 2n+1$

უტოლობათა ყველა მთელ ამონახსნთა სიმრავლე.

§ 6. მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენების სხვადასხვა სქემა

მაგალითი 1: იპოვეთ n - ის ყველა ნატურალური მნიშვნელობები, რომელთათვისაც $(1 + 2^n + 4^n) \vdots 7$.

ამოხსნა: შემოვიტანოთ აღნიშვნა: $a_n = 1 + 2^n + 4^n$. ვიპოვოთ a_n n - ის მნიშვნელობები n - ის გარკვეული მნიშვნელობებისთვის. კერძოდ, როცა

n=1, მაშინ $a_n = 7 \ \vdots \mathbf{7}$;

n=2, მაშინ $a_n = 21 \ \vdots \mathbf{7}$;

n=3, მაშინ $a_n = 73 \ \bar{\vdots} \ \mathbf{7}$;

n=5, მაშინ $a_n = 1057 \ \vdots \mathbf{7}$;

n=4, მაშინ $a_n = 273 \ \vdots\, \mathbf{7}$;

n=6, მაშინ $a_n = 4161 \ \overline{\vdots}\, \mathbf{7}$.

ამ მაგალითებიდან გამომდინარე მივდივართ ჰიპოთეზამდე:

$a_n \vdots\, \mathbf{7}$,როცა n=3k-2 და n=3k -1,k∈N;

$a_n \ \overline{\vdots}\ \mathbf{7}$,როცა n=3k,k ∈ .

მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით არ არის რთული დავამტკიცოთ შემდეგი სამი წინადადება:

$(1 + 2^{3k-2} + 4^{n3k-2}) \vdots 7$, k∈N;

$(1 + 2^{3k-1} + 4^{3k-1}) \vdots 7$, k∈N;

$(1 + 2^{3k} + 4^{3k})\ \overline{\vdots}\ 7$, k∈N.

მაგრამ ამ ამოცანის ამოსახსნელად შეგვიძლია გამოვიყენოთ ინდუქციური მსჯელობის განსხვავებული სქემა.

მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი შეგვიძლია შევადაროთ კიბეზე მოძრაობას; თუ თქვენ დადექით პირველ საფეხურზე და დარწმუნებული ხართ, რომ იქნებით რა k-ურ საფეხურზე, შეგიძლიათ ამ საფეხურიდან გადახვიდეთ (k+1) - ე საფეხურზე, მაშინ შეგიძლიათ ნებისმიერ საფეხურზე მოხვედრა.

მაგრამ თითოეულ საფეხურზე მოხვედრა შეიძლება სხვადასხვა გზით. მაგალითად, თუ თქვენ ხართ პირველ საფეხურზე და შემდეგ ადიხართ ორ - ორი ნაბიჯით, ანუ ერთი საფეხურის გამოტოვებით, მაშინ მოხვდებით ყველა კენტნომრიან საფეხურზე. ცხადია, რომ თუ თქვენ მოძრაობას დაიწყებთ მეორე საფეხურიდან, მაშინ გაივლით ყველა ლუწნომრიან საფეხურს და შესაბამისად, ამ ორი ასვლით შეგიძლიათ ყველა საფეხურზე მოხვედრა.

ეს მაგალითი გვიჩვენებს, რომ შესაძლებელია ინდუქციური მსჯელობის შემდეგი სქემა:

ინდუქციის მეთოდის საბაზო ნაწილში მტკიცდება (მოწმდება) დებულების სამართლიანობა n=1 და n=2 – სთვის.

ინდუქციის მეთოდის მეორე ნაწილს აქვს შემდეგი სტრუქტურა:

ვუშვებთ, რომ დებულება სამართლიანია n=k - სათვის და შემდეგ ვამტკიცებთ, რომ ის სამართლიანი იქნება n = k+2 - სთვის.

მსჯელობის ასეთ სქემას ეწოდება ინდუქცია ბიჯით 2. ცხადია, რომ ინდუქციური მსჯელობა შეგვიძლია განვიხილოთ ნებისმიერი რაოდენობა ბიჯით. მაგალითად მოცემულია ამოცანა:

(მაგალითი 1) დავასაბუთოდ ინდუქციის მეთოდით ბიჯით 3:

I.ინდუქციის მეთოდის საბაზო ნაწილი: $a_1 \vdots 7$, $a_2 \vdots 7, a_3 \not\vdots$ **7.**

II.ინდუქციის მეთოდის მეორე ნაწილი: დავუშვათ, რომ a_k იყოფა (არ იყოფა) უნაშთოდ 7 - ზე; დავამტკიცოთ,რომ a_{k+3} აგრეთვე იყოფა (არ იყოფა) უნაშთოდ 7 - ზე. ამის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ,რომ $(a_{k+3} - a_k) \vdots 7$. რაშიც ადვილად დარწმუნდებით დამოუკიდებლად.

მაგალითი 2 : a რიცხვი ისეა შერჩეული,რომ $a + \frac{1}{a}$ რიცხვი მთელია. დაამტკიცეთ,რომ n-ის ნებისმიერი ნატურალური მნიშვნელობისთვის $a^n + \frac{1}{a^n}$ აგრეთვე მთელი რიცხვია.

ამოხსნა:

1) n=1-სათვის დებულება ჭეშმარიტია.

2) დავუშვათ, რომ n=k-სათვის $a^k + \frac{1}{a^k}$ მთელია.

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$a^{k+1} + \frac{1}{a^{k+1}} = (a^k + \frac{1}{a^k})(a + \frac{1}{a}) - (a^{k-1} + \frac{1}{a^{k-1}}) \qquad (1)$$

ამ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $a^{k+1} + \frac{1}{a^{k+1}}$ რიცხვი მთელია იქნება, თუ მთელია $a^k + \frac{1}{a^k}$ და $a^{k-1} + \frac{1}{a^{k-1}}$ რიცხვები, რაც არ შეესაბამება ინდუქციის მეთოდის მეორე ნაწილს.

ამიტომ ამ ამოცანის დასამტკიცებლად შეგვიძლია გამოვიყენოთ ინდუქციური მსჯელობის განსხვავებული სქემა:

დავუშვათ, რომ დასამტკიცებელი დებულება სამართლიანია, როცა n=k-1 და n=k. შემდეგ დავამტკიცოთ, რომ იგი სამართლიანი იქნება n=k+1 - სათვის.

ეს ცვლილება თავის მხრივ მოითხოვს, რომ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის საბაზისო ნაწილში დებულება შემოწმდეს არა მარტო n=1 - სთვის, არამედ n=2 - საც.

გვექნება, რომ $a^2 + \frac{1}{a^2} = (a + \frac{1}{a})^2 - 2$.

შესაბამისად, $a^2 + \frac{1}{a^2}$ რიცხვი მთელი იქნება,რადგანაც მთელია $a + \frac{1}{a}$ რიცხვი.

ამის შემდეგ (1) ტოლობიდან გამომდინარეობს მოცემული დებულების სამართლიანობა.

განვიხილოთ ინდუქციური დამტკიცების კიდევ ერთი სქემა:

1) დავასაბუთოთ დებულების სამართლიანობა n = 1 – სთვის;
2) იმ დაშვებით, რომ ჰიპოთეზა სამართლიანია ყველა n≤k - სათვის, დავამტკიცოთ მისი ჭეშმარიტება n = k+1 - სათვის.

მაგალითი 3: დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ 2 - ის რამოდენიმე განსხვავებული ხარისხის ჯამის სახით. შესაძლებელია, ნულოვანი ხარისხის ჩათვლით. (თუ ნატურალური რიცხვი 2 - ის ხარისხია, მაშინ ჩავთვალოთ, რომ ის წარმოდგენილია ერთი შესაკრების ჯამის სახით).

ამოხსნა:

1) n=1 – სათვის გვაქვს, $1=2^n$.

2) ვთქვათ, დებულება სამართლიანია ყველა ნატურალური n - სათვის, სადაც $n\leq k, k\epsilon N$.

განვიხილოთ ნატურალური რიცხვი k+1. თუ ეს რიცხვი არის 2 - ის ხარისხი, მაშინ თეორემა დამტკიცებულია. თუ k+1 რიცხვი არ არის 2 - ის ხარისხი, მაშინ მოიძებნება ისეთი ნატურალური m რიცხვი, რომ $2^m < \mathbf{k+1} < 2^{m+1}$. აქედან $k+1 = 2^m + p$,სადაც $p\epsilon N$.

თუ დავუშვებთ, რომ $p \geq 2^m$,მაშინ $k+1 \geq 2^m + 2^m = 2^{m+1}$, რაც ეწინააღმდეგება

$k+1 < 2^{m+1}$ უტოლობას. ე.ი. $p < 2^m$, მაგრამ $2^m < k+1$,ამიტომ $p < 2^m \leq k$.

გვაქვს: $k+1 = 2^m + p$, სადაც $p\epsilon\mathbf{N}$, $\mathbf{p} < 2^m \leq k$, მაშინ ინდუქციური დაშვების თანახმად p რიცხვი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ 2 - ის განსხვავებული ხარისხების ჯამის სახით, ამასთან ამ

შესაკრებებს შორის არ იქნება 2^m მ.თუ ამ ჯამს დავამატებთ 2^m რიცხვს, მივიღებთ k+1 რიცხვის საძიებელ წარმოდგენას.

მაგალითი 4: დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი x >0 და ნებისმიერი ნატურალური n - სათვის სამართლიანია უტოლობა

$$x^n + x^{n-2} + x^{n-4} + \cdots + \frac{1}{x^{n-4}} + \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{1}{x^n} \geq n+1 . \qquad (1)$$

ამოხსნა. 1 ა) n=1 – სათვის (1) უტოლობა ღებულობს შემდეგ სახეს:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

(2) უტოლობა გამომდინარეობს შემდეგი უტოლობიდან

$$(x-1)^2 \geq 0.$$

1 ბ) n = 2 - სათვის (1) უტოლობა მიიღებს სახეს

$$x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} \geq 3. \qquad (3)$$

(2) ტოლობა სამართლიანია ნებისმიერი x > 0 რიცხვისათვის.ე.ი.ის სამართლიანი იქნება,თუ x - ს შევცვლით x^2- ით, ანუ

$$x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2.$$

საიდანაც მიიღება (3) უტოლობა.

1) დავუშვათ, რომ (1) უტოლობა სამართლიანია n = k - სათვის, სადაც k - რაღაც ნატურალური რიცხვია, ე.ი.

$$x^k + x^{k-2} + x^{k-4} + \cdots + \frac{1}{x^{k-4}} + \frac{1}{x^{k-2}} + \frac{1}{x^k} \geq k+1. \qquad (4)$$

დავამტკიცოთ, რომ მაშინ (1) ტოლობა სამართლიანი იქნება n = k + 2 - სათვის, ე.ი.

$$x^{k+2} + x^k + x^{k-2} + \cdots + + \frac{1}{x^{k-2}} + \frac{1}{x^k} + \frac{1}{x^{k+2}} \geq k+3. \qquad (5)$$

თუ (2) უტოლობაში x - ს შევცვლით x^{k+2}, მივიღებთ

$$x^{k+2}+\frac{1}{x^{k+2}} \geq 2. \qquad (6)$$

(4) და (6) ტოლობების შეკრებით მივიღებთ (5) უტოლობას.

ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ (1) უტოლობა სამართლიანია n=1 და n=2 - სათვის. ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ n=k - სათვის (1) უტოლობის ჭეშმარიტებიდან გამომდინარეობს, რომ იგი სამართლიანია n = k+2- სათვის.

1ა) და 2) -ს შედეგები ამტკიცებს, რომ (1) უტოლობა სამართლიანია ნებისმიერი კენტი n- სათვის. ანალოგიურად 1 ბ) და 2) - ის თანახმად (1) ჭეშმარიტია ნებისმიერი ლუწი n რიცხვისათვის. საბოოლოდ, გვაქვს უფლება ვთქვათ, რომ (1) სამართლიანი იქნება ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის.

სავარჯიშოები:

1. $\frac{{x_1}^2}{y_1}+\frac{{x_2}^2}{y_2}+\cdots+\frac{{x_n}^2}{y_n} \geq \frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2}{y_1+y_2+\cdots+y_n}$,

   სადაც $y_1, y_2, \cdots, y_n -$ დადებთი რიცხვებია;

2. დაამტკიცეთ უტოლობა $|a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n| \leq |a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_1|$.
3. დაამტკიცეთ, რომ თუ $a \geq 0, \mathbf{b} \geq 0, \mathbf{n} \epsilon \mathbf{N}$, მაშინ $(\frac{a+b}{2})^n \leq \frac{a^n+b^n}{2}$;
4. დაამტკიცეთ, რომ $\frac{a^{n+1}}{b^n} \geq (n+1)a - nb$, სადაც $a > 0$, $b > 0, \mathbf{n} \epsilon \mathrm{N}$.
5. დაამტკიცეთ, რომ $a_n = (\mathbf{n}+\mathbf{1})(\mathbf{n}+\mathbf{2}) \cdots 2n$ რიცხვის მარტივ მამრავლებად დაშლა შეიცავს ზუსტად n თანამამრავლს, რომელთაგან თითოეული 2 - ის ტოლია.
6. დაამტკიცეთ, რომ თუ 2^p-1 მარტივი რიცხვია, მაშინ p –ც მარტივი რიცხვია (გამოიყენეთ საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდი)

§ 7. სხვადასხვა ტიპის ამოცანის ამოხსნა მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით

დავამტკიცოთ თეორემები მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით:

თეორემა 1. დავამტკიცოთ, რომ თუ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ნებისმიერი დადებითი ნამდვილი რიცხვებია, რომელთა ნამრავლი ტოლია 1, მაშინ მათი ჯამი არაა ნაკლები n-ზე. ანუ

$$(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1) \Rightarrow (x_1+x_2+\ldots+x_n \geq n)$$

დამტკიცება: I. როცა n=1, მაშინ $(x_1=1) \Rightarrow (x_1 \geq 1)$ ჭ ჭ

უ.დ. როცა n=k+1, სრულდება $(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k x_{k+1} = 1) \Rightarrow (x_1+x_2+\ldots+x_k+x_{k+1} \geq k+1)$

II. დავუშვათ, რომ როცა n=k, მაშინ $(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k = 1) \Rightarrow (x_1+x_2+\ldots+x_k \geq k)$

რადგან $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_k \cdot x_{k+1} = 1$. ამიტომ შეიძლება ადგილი ჰქონდეს ორ შემთხვევას:

1) $x_1 = x_2 = ... = x_k = x_{k+1} = 1$, მაშინ $x_1 + x_2 + ... + x_k + x_{k+1} = k+1$.

2) მეორე შემთხვევაში $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_k x_{k+1}$ ნამრავლში მოიძებნება, როგორც 1-ზე მეტი, ასევე 1-ზე ნაკლები რიცხვი (თუ ყველა თანამამრავლი 1-ზე ნაკლებია, მაშინ მათი ნამრავლი 1-ზე ნაკლები იქნება.) დავუშვათ, $x_1 < 1$ და $x_{k+1} > 1$, მაშინ $(x_1 x_{k+1}) x_2 x_3 ... x_k = 1$ შემოვიღოთ აღნიშვნა $y_1 \equiv x_1 x_{k+1}$ მივიღებთ $y_1 x_2 x_3 ... x_k = 1$ აქ k რაოდენობა დადებითი რიცხვების ნამრავლი 1-ის ტოლია, მაშინ დაშვების თანახმად მათი ჯამი არაა ნაკლები k-ზე ე.ი $y_1 + x_2 + x_3 + ... + x_k \geq k$

$x_1 + x_2 + ... + x_k + x_{k+1} = (y_1 + x_2 + ... + x_k) + x_{k+1} - y_1 + x_1 \geq k + x_{k+1} - y_1 + x_1 =$

$= k + x_{k+1} - x_1 x_{k+1} + x_1 = k + x_{k+1}(1-x_1) + 1 - 1 + x_1 = k + (1-x_1)(x_{k+1}-1) + 1 = k+1+(1-x_1)(x_{k+1}-1) > k+1$

რადგან $x_1 < 1$ $1-x_1 > 0$. $X_{k+1} > 1$ $x_{k+1}-1 > 0$ ამიტომ $(1-x_1)(x_{k+1}-1) > 0$

I და II პირობა შესრულდა, ამით თეორემა დამტკიცებულია

თეორემა 2. დადებითი რიცხვების საშუალო არითმეტიკული, არაა ნაკლები ამავე რიცხვების საშუალო გეომეტრიულზე.

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \qquad \text{სადაც } x_1, x_2, ... x_n > 0$$

დამტკიცება: $(y \equiv \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}) \Leftrightarrow (1 = \sqrt[n]{\frac{x_1}{y}\frac{x_2}{y} ... \frac{x_n}{y}}) \Leftrightarrow (\frac{x_1}{y}\frac{x_2}{y} ... \frac{x_n}{y} = 1)$ თეორემა 1 –ის თანახმად, თუ n რაოდენობა დადებითი რიცხვების ნამრავლი უდრის 1, მაშინ მათი ჯამი არაა ნაკლები n-ზე, ამიტომ$(\frac{x_1}{y} + \frac{x_2}{y} + ... + \frac{x_n}{y} \geq n) \Leftrightarrow \Leftrightarrow (x_1 + x_2 + ... + x_n \geq ny) \Leftrightarrow$ $\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq y$ ე.ი.

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \qquad \text{სადაც } x_1, x_2, ... x_n > 0$$

შევნიშნოთ, რომ ტოლობა სრულდება, მაშინ თუ $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

გავიხსენოთ **§2-ში** განხილული **მე -3-ე ამოცანა:**

დავამტკიცოთ, რომ მხოლოდ სამლარიანი და ხუთლარიანი კუპიურებით შეიძლება შევიძინოთ ნებისმიერი ნივთი, რომლის ღირებულება 7 ლარზე მეტია.

I. როცა n=8; მაშინ 8 = 3+5; დებულება ჭეშმარიტია

II. დავუშვათ, რომ დებულება ჭეშმარიტია, როცა n =k (k >7) ე.ი. k=3m+5p სადაც $m, n \in N_0$ დავამტკიცოთ, რომ იგი ჭეშმარიტი იქნება, როცა n = k+1; ე.ი. k+1=3m+5p+1;

შესაძლებელია ორი შემთხვევა ა) k ლარი წარმოდგენილია მხოლოდ 3 ლარიანი კუპიურებით; ბ) k ლარის გადახდისას გვხვდება ერთი მაინც 5 ლარიანი კუპიურა.

ა) შემთხვევაში სულ მცირე 3 სამლარიანი კუპიურა მაინც იქნება (9 = 3 · 3) ამიტომ k+1 ლარის გადახდისას 3 სამლარიანი კუპიურა შეიცვლება, 2 ხუთლარიანი კუპიურით.

ბ)შემთხვევაში ერთი 5 ლარიანი კუპიურა შეიცვლება 2 სამლარიანი კუპიურით. ამით დებულება დამტკიცებულია.

განვიხილოთ ტრიგონომეტრიულ იგივეობების დამტკიცება ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით:

მაგალითი 1: დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობა:

$$\cos\alpha\ \cos 2\alpha\ \cos 4\alpha \cdots \cos 2^{n}\alpha = \frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha} \quad .$$

ამოხსნა. 1) როცა n = 0 ტოლობა სამართლიანია, რადგანაც

$$\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}$$

1) დავუშვათ, რომ ტოლობა სამართლიანია როცა n = k, ე.ი.

$$\cos\alpha\ \cos 2\alpha\ \cos 4\alpha \cdots \cos 2^{k}\alpha = \frac{\sin 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\sin\alpha} \ .$$

დავამტკიცოთ, რომ იგი სამართლიანი იქნება, როცა n = k+1.

მართლაც,

$$\cos\alpha\ \cos 2\alpha\ \cos 4\alpha \cdots \cos 2^{k}\alpha\ \ \cos 2^{k+1}\alpha = \frac{\sin 2^{k+1}\alpha\ \cos 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\sin\alpha} = \frac{\sin 2^{k+2}\alpha}{2^{k+2}\sin\alpha} \ .$$

მაგალითი 2: დაამტკიცეთ, რომ

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{nx}{2} \ .$$

ამოხსნა: 1) ტოლობა სამართლიანია როცა n = 1.

2) დავუშვათ, რომ

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin kx = \frac{\sin\frac{k+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{kx}{2},$$

მაშინ

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin kx + \sin(k+1)x = \frac{\sin\frac{k+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{kx}{2} + \sin(k+1)x = \frac{\sin\frac{k+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{kx}{2} +$$

$$2\sin\frac{k+1}{2}\cos\frac{k+1}{2}\ \mathrm{x} = \frac{\sin\frac{k+2}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{k+1}{2}\mathrm{x},$$

რადგანაც

$$2\cos\frac{k+1}{2}\ \mathrm{x}\ \sin\frac{x}{2} = \sin\frac{k+2}{2}\ \mathrm{x} - \sin\frac{kx}{2}.$$

განვიხილოთ ფიბონაჩის მიმდევრობა და დავამტკიცოთ მისი თვისებები მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით.

მიმდევრობას, რომლის პირველი და მეორე წევრი $F_1=F_2=1$,ხოლო ყოველი წევრი დაწყებული მესამედან წინა ორი წევრის ჯამის ტოლია , ფიბონაჩის მიმდევრობა ეწოდება.დავწეროთ ფიბონაჩის მიმდევრობის პირველი რამოდენიმე წევრი: 1, 1,2 3 5,8,13,21,34,55,89...

ფიბონაჩის მიმდევრობის რეკურენტულ ფორმულას აქვს შემდეგი სახე: $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$, სადაც $n\geq 2$.

ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით დავამტკიცოთ ფიბონაჩის მიმდევრობის ზოგიერთი თვისება:

თვისება 1: $F_1+F_2+...+F_n=F_{n+2}-1$.

დამტკიცება:

ა) შევამოწმოთ როცა n=1. $F_1=1$ და $F_3-1=2-1=1$. ე.ი. ჭეშმარიტია.

ბ)დავუშვათ, რომ ჭეშმარიტია: $F_1+F_2+...+F_n=F_{n+2}-1$.(1)

გ)დავამტკიცოთ, რომ მაშინ

$F_1+F_2+...+F_n+F_{n+2}=F_{n+3}-1$.

მართლაც (1)-ის თანახმად გვექნება: $F_{n+2}-1+F_{n+1}=F_{n+3}-1$.საიდანაც ვღებულობთ,ჭეშმარიტ ტოლობას: Fn+2+Fn+1=Fn+3.

თვისება 2: დავამტკიცოთ, რომ F_{3n} ლუწია:

ა) შევამოწმოთ როცა n=1. მართლაც, $F_3=2$.

ბ)დავუშვათ, რომ F_{3n} ლუწია.

გ)დავამტკიცოთ, რომ მაშინ $F_{3(n+1)}$ ლუწია. მართლაც,

$$F_{3(n+1)}=F_{3n+3}=F_{3n+1}+F_{3n+2}=F_{3n+1}+F_{3n}+F_{3n+1}=F_{3n}+2F_{3n+1}.$$

ამით თვისება დამტკიცებულია.

თვისება 3: დავამტკიცოთ, რომ F_{5n} იყოფა 5-ზე.

ა) როცა n=1, მაშინ $F_{5n}=5$. დებულება ჭეშმარიტია.

ბ) დავუშვათ, რომ F_{5n} იყოფა 5 -ზე.დავამტკიცოთ,რომ მაშინ F_{5n+5} გაიყოფა 5-ზე.

$F_{5n+5}=F_{5n+3}+F_{5n+2}=F_{5n+1}+$
$F_{5n+2}+F_{5n+2}+F_{5n+3}=2(F_{5n}+F_{5n+1})+F_{5n+1}+F_{5n+2}=2F_{5n}+2F_{5n+1}+F_{5n+1}+F_{5n}+$
$F_{5n+1}+F_{5n+1}=3F_{5n}+5F_{5n+1}$.

თვისება დამტკიცებულია.

ფიბონაჩის რიცხვებს შეიძლება შევხვდეთ სხვადასხვა სიტუაციებში. განვიხილოთ ერთ-ერთი მაგალითი:

დავწეროთ შემდეგი ტოლობები:

$\mathbf{1}=\frac{1}{1}$; $\mathbf{1}+\frac{1}{\mathbf{1}}=\frac{2}{1}$; $\mathbf{1}+\frac{1}{\mathbf{1}+\frac{1}{1}}=\frac{3}{2}$; $\mathbf{1}+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}=\frac{8}{5}$; $\underline{\mathbf{1}}+\frac{1}{\mathbf{1}+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}}=\frac{13}{5}$ და ა.შ.

ცხადია, რომ მომდევნო გამოსახულების მნიშვნელობა იქნება: $1+\frac{1}{\frac{13}{18}}=\frac{21}{13}$.

ჩვენ ვხედავთ, რომ თითოეული ტოლობის მარჯვენა ნაწილი წარმოადგენს ფიბონაჩის მიმდევრობის მომდევნო წევრის წინა წევრთან შეფარდებას.

იმის გამო, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა

$\mathbf{11}+\frac{1}{\frac{u_k}{u_{k-1}}}=1+\frac{u_{k-1}}{u_k}=\frac{u_k+u_{k-1}}{u_k}=\frac{u_{k+1}}{u_k}$, ჩვენ ფაქტობრივად მათემატიკური ინდუქციის გამოყენებით დავამტკიცეთ, რომ

$$\mathbf{1}+\frac{1}{\mathbf{1}+\frac{1}{\mathbf{1}+\cdots_{\cdots+\frac{1}{\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}}}}}}=\frac{u_{n+1}}{u_n},$$

სადაც n არის „გამუქებული" ერთიანების რაოდენობა.

ფრანგმა მეცნიერმა ჟან ბინემ (1786 – 1856) დაადგინა ფიბონაჩის მიმდევრობის n- ური წევრის ფორმულა:

$$a_n=\frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}.$$

ძნელი დასაჯერებელია, რომ ეს ფორმულა გვაძლევს ნატურალურ რიცხვს, მაგრამ ეს ასეა.

სავარჯიშოები:

1. დაამტკიცეთ, რომ თუ $x_1, x_2, \ldots x_n$ დადებითი რიცხვებია, მაშინ

   ა) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}\geq n$; ბ) დაამტკიცეთ, რომ $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\geq 2$;

2. თეორემა 2 –ის გამოყენებით დაამტკიცეთ , რომ ∀n∈N .

   ა) $(a_1+a_2+\ldots+a_n)(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n})\geq n^2$ სადაც. $a_1, a_2, \ldots a_n$, დადებითი რიცხვებია.

   ბ) $\sqrt[n+1]{ab^n}\leq\frac{a+nb}{n+1}$ სადაც, a>o, b>0, გ) $a_2\ldots a_n\leq\frac{a_1^n+a_2^n+\ldots+a_n^n}{n}$ დ) $n!\leq\frac{(n+1)^n}{2^n}$

3*. დაამტკიცეთ. რომ ნებისმიერი $a_1, a_2, \ldots a_n$ რიცხვებისათვის სრულდება ტოლობა

$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2 = a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+2a_1a_2+2a_1a_3+\ldots+2a_1a_n+\ldots+2a_{n-1}a_n$ სადაც $n \geq 2$, $n \in N$.

4.* დაამტკიცეთ, რომ თუ $n \geq -4$, $n \in Z$ მაშინ სრულდება უტოლობა

$18 \cdot 2^n \geq n^2+6n+9$

5. ამოხსენით უტოლობა $2^n > 2n^2 - 3n + 1$, თუ $n \in N$

6.* რამდენი ქვესიმრავლე აქვს n ($n \in N$) ელემენტიან სიმრავლეს? (შეიმუშავეთ ჰიპოთეზა და დაამტკიცეთ)

7*. დაამტკიცეთ, რომ $\forall n \in N$.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$$

8. დაამტკიცეთ, რომ

ა) $\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$.

ბ) $\sin x+2\sin 2x+3\sin 3x+\cdots+n\sin nx=\frac{(n+1)\sin nx-n\sin(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}$;

გ) $\cos x+2\cos 2x+3\cos 3x+\cdots+n\cos nx=\frac{(n+1)\cos nx-n\cos(n+1)x-1}{4\sin^2\frac{x}{2}}$;

დ) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}tg\frac{x}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}tg\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2^n}ctg\frac{x}{2^n}-\operatorname{ctg}x$ $(x \neq m\pi)$.

ე) $\operatorname{arcctg}3+\operatorname{arcctg}5+\cdots+\operatorname{arcctg}(2n+1)=\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+\cdots+\operatorname{arctg}\frac{n+1}{n}-n\operatorname{arctg}1$.

8. დაამტკიცეთ ფიბონაჩის მიმდევრობის რამოდენიმე თვისება მათემატიკური ინდუციის მეთოდის გამოყენებით:

ა) $F_1+F_2+\ldots+F_n=F_{n+2}-1$;

ბ) $F_1+F_3+F_5\ldots+F_{2n-1}=F_{2n}$;

გ) $F_2+F_4+F_6\ldots+F_{2n}=F_{2n+1}-1$;

დ) ${F_1}^2+{F_2}^2+{F_3}^2+\cdots+{F_n}^2=F_n F_{n+1}$;

ე) ${F_n}^2=F_{n-1}F_{n+1}+(-1)^{n+1}$, სადაც $n>2$;

9. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი შეიძლება წარმოვადგინოთ ფიბონაჩის მიმდევრობის რამოდენიმე განსხვავებული რიცხვის ჯამის სახით.

§ 7. გეომეტრიული ამოცანები მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით

მათემატიკური ინდუქციის მეთოდს დიდი გამოყენება აქვს გეომეტრიაში. ამ პარაგრაფში განვიხილავთ რამდენიმე გეომეტრიული ამოცანის ამოხსნას მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით:

ამოცანა N 1 . რამდენ ნაწილად გაყოფს სიბრტყეს, მასზე მდებარე n წრფე რომელთაგან არც ერთი ორი არ არის პარალელური და არც ერთი სამი არ გადის ერთ წერტილზე?

ამოხსნა: შესრულეთ შესაბამისი ნახაზი და ადვილად დარწმუნდებით, რომ ერთი წრფე სიბრტყეს ორ ნაწილად ყოფს, ორი წრფე – 4 ნაწილად, სამი წრფე –7 ნაწილად, ოთხი წრფე –11 ნაწილად. ავღნიშნოთ s_n–ით რაოდენობა სიბრტყის იმ ნაწილებისა რომლებადაც n წრფე გაყოფს სიბრტყეს მაშინ, $s_1=2$

$$s_2=s_1+2$$

$$s_3=s_2+3 \quad . \ . \ . \ . \ .$$

$s_n=s_{n-1}+n$ შევკრიბოთ მიღებული ტოლობები, მივიღებთ

$s_n=2+2+3+4+\ldots+n$ (შეასრულეთ გამოთვლები) $s_n=\frac{n^2+n+2}{2}$ – (1)

დავამტკიცოთ (1) ტოლობის სამართლიანობა მათემატიკური ინდუქციის პრინციპით.

I. როცა n=1 $s_1=\frac{1+1+2}{2}=2$ მართლაც ერთი წრფე სიბრტყეს ორ ნაწილად ყოფს, მაშასადამე (1) ტოლობა სწორია

II. დავუშათ, როცა n=k მაშინ, k რაოდენობის წრფე სიბრტყეს ყოფს

$s_k=\frac{k^2+k+2}{2}$ ნაწილად ჭეშმარიტია.
უ.დ. როცა n=k +1, მაშინ k +1 რაოდენობის წრფე სიბრტყეს გაყოფს

$s_{k+1}=\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}$ ნაწილად.

(k+1)-ე წრფე გადაკვეთს ყველა დარჩენილ k რაოდენობის წრფეს განსხვავებულ წერტილებში, ამიტომ მათთან გადაკვეთის წერტილთა რაოდენობა იქნება k და ამ წერტილებით იგი გაიყოფა k+1 ნაწილად, მიღებული თითოეული ნაწილი სიბრტყის არსებულ იმ ნაწილს, რომელშიც გაივლის, ორ ნაწილად გაყოფს და მაშასადამე,

სიბრტყის არსებულ s_k რაოდენობის ნაწილს დაემატება k+1 ნაწილი და მიიღება $s_{k+1} = s_k+k+1=\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}$ (შეასრულეთ საჭირო გამოთვლები).

I და II პირობა შესრულდა ამიტომ $S_n=\frac{n^2+n+2}{2}$.

ამოცანა N2. დაამტკიცეთ, რომ სიბრტყის ერთ წერტილზე გამავალი n წრფე სიბრტყეს ყოფს 2n ნაწილად.

დამტკიცება: n=1 -სათვის დებულება სამართლიანია, რადგანაც ერთი წრფე სიბრტყეს ორ ნაწილად ყოფს.

დავუშვათ, რომ მოცემულ წერტილზე გამავალი წრფე სიბრტყეს ყოფს 2K ნაწილად, მაშინ ამავე წერტილზე გამავალი (K+1)-ე წრფე ამ ნაწილებიდან ორს გაყოფს ორ ნაწილად და ამგვარად, სიბრტყე გაიყოფა 2(K+1) ნაწილად.

ამოცანა N3. დავამტკიცოთ, რომ საერთო წერტილის მქონე n სიბრტყე, რომელთაგან არც ერთი სამი არ გადის ერთ წრფეზე, სივრცეს ყოფს An=n(n-1)+2 ნაწილად.

დამტკიცება: 1) ერთი სიბრტყე სივრცეს ყოფს ორ ნაწილად და A1=2. ე.ი. n=1-სათვის დებულება სამართლიანია. 2) დავუშვათ, რომ დებულება ჭეშმარიტია n=k-სთვის . ე.ი. k სიბრტყე სივრცეს ყოფს k(k-1)+2 ნაწილად. 3) დავამტკიცოთ, რომ მაშინ k+1 სიბრტყე სივრცეს გაყოფს k(k+1)+2 ნაწილად.

მართლაც, ვთქვათ, არის k+1-ე სიბრტყე. თავდაპირველი კ სიბრტყიდან თითოეული p სიბრტყეს გადაკვეთს გარკვეულ წრფეზე რის შედეგაც p სიბრტყე დაიყოფა ნაწილებად ერთ წერტილზე გამავალი k სხვადასხვა წრფით. ამოცანა 1-ის თანახმად p სიბრტყე დაიყოფა 2k ნაწილად, რომელთაგან თითოეული წარმოადგენს საერთო წვეროს მქონე ბრტყელ კუთხეს.

თავდაპირველი k სიბრტყე სივრცეს ყოფს გარკვეულ მრავალწახნაგა კუთხეებად, რომელთაგან ზოგიერთი p სიბრტყის საშუალებით იყოფა 2 ნაწილად.

ორი ასეთი ნაწილის საერთო წახნაგი არის ერთ-ერთი იმ 2k ბრტყელი კუთხეებიდან, რომლებადაც დაყოფილია p სიბრტყე.

ეს ნიშნავს, რომ იმ მრავალწახნაგა კუთხეების რაოდენობა, რომლებადაც იყოფა p სიბრტყე ორ ნაწილად, ვერ იქნება 2k -ზე მეტი.

მეორეს მხრივ p სიბრტყის თავდაპირველ k სიბრტყესთან გადაკვეთის შედეგად მიღებული 2k ნაწილიდან თითოეული არის ორი მრავალწახნაგა კუთხის საერთო წახნაგი და მაშასადამე, თავდაპირველი k სიბრტყით შექმნილ მრავალწახნაგა კუთხეებს ყოფს ორ ნაწილად.

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ იმ მრავალწახნაგა კუთხეების რაოდენობა, რომლებიც p სიბრტყით იყოფიან ორ ნაწილად არ შეიძლება იყოს 2k-ზე ნაკლები.

მაშასადამე, p სიბრტყე ორ ნაწილად ყოფს თავდაპირველი k სიბრტყით შექმნილ სივრცის ზუსტად 2k ნაწილს. რადგან k სიბრტყე სივრცეს ყოფს k(k-1)+2 ნაწილად, ამიტომ k+1 სიბრტყე სივრცეს გაყოფს [k(k-1)+2]+2k=k(k+1)+2 ნაწილად.

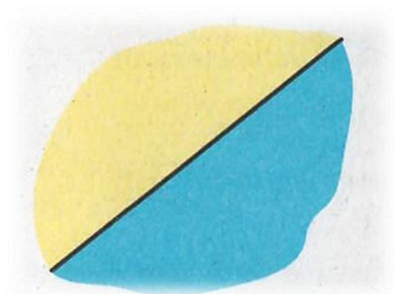
დებულება დამტკიცებულია.

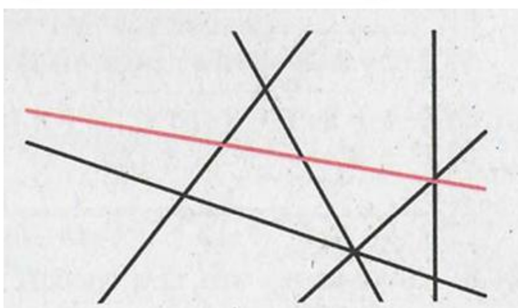
ვთქვათ, სიბრტყე გარკვეული რაოდენობა წრფეების საშუალებით დაყოფილია არეებად. ორ არეს ეწოდება მეზობელი, თუ მათი საზღვარი არის მონაკვეთი, სხივი ან წრფე.

ამოცანა N4.   დავამტკიცოთ, რომ მეზობელი არეები ისე შეგვიძლია შევღებოთ ორ ფერად, ისე რომ მეზობელი არეები იყოს განსხვავებული ფერის.

დამტკიცება: ვთქვათ, სიბრტყეზე გავლებულია n რაოდენობა წრფე.

ცხადია, რომ $n=1$-სათვის ამოცანა სამართლიანია.(ნახ.1)

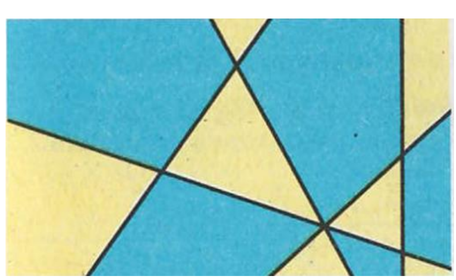




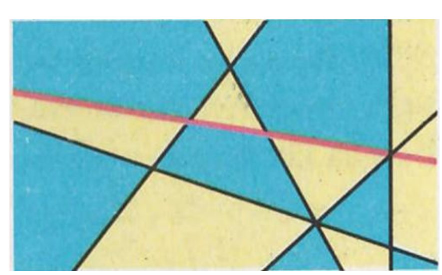
ნახ.1 ნახ.2

დავუშვათ,რომ დებულება სამართლიანია $n=k$-სათვის, ანუ n რაოდენობა წრფეებით წარმოქმნილი არეები შეიძლება შეიღებოს ამოცანაში აღნიშნული წესით.

ვთქვათ, სიბრტყეზე გავლებულია $k+1$ რაოდენობა წრფე. აზრობრივად მოვაშოროთ ერთ-ერთი ამ წრფეებიდან (ნახ.2-ზე ეს წითელი ფერის წრფეა). მაშინ სიბრტყეზე დაგვრჩება k რაოდენობა წრფე და ისინი ქმნიან არეებს, რომლებიც ჩვენი დაშვებით შეგვიძლია შევღებოთ აღნიშნული წესის მიხედვით(ნახ.3). წითელი წრფის ქვედა ნახევარსიბრტყეში მდებარე ყველა არის ფერი შევცვალოთ საწინააღმდეგო ფერით, ხოლო ზედა ნახევარსიბრტყეში მდებარე არეთა ფერები უცვლელი დავტოვოთ(ნახ.4). მიღებული ნახაზი აკმაყოფილებს პირობას. რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.



ნახ.3



ნახ.4

ამოცანა N5. დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი $n\geq4$ ნატურალური რიცხვისათვის არსებობს ამოზნექილი n-კუთხედი,რომელსაც ზუსტად სამი მახვილი კუთხე აქვს.

დამტკიცება:

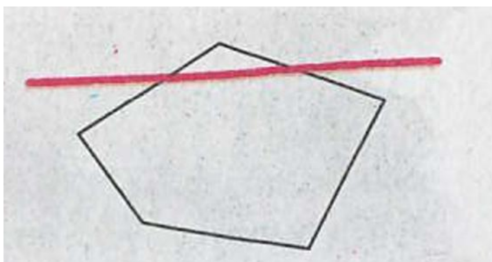
1)n=4-სათვის ეს თეორემა სამართლიანია:არსებობს ოთხკუთხედი, რომელსაც აქვს სამი მახვილი კუთხე.

2)დავუშვათ,რომ ეს დებულება სამართლიანია n-კუთხედისთვის.

3) დავამტკიცოთ,რომ დებულება სამართლიანი იქნება (n+1)-კუთხედისთვის.

მართლაც, ცხადია, რომ ნებისმიერ n-კუთხედში არსებობს ბლაგვი კუთხე.

ჩამოვაჭრათ n-კუთხედს ეს ბლაგვი კუთხე(ნახ.5).



ნახ.5

მივიღებთ (n+1)-კუთხედს, რომელსაც ექნება მახვილი კუთხეების იგივე რაოდენობა, რაც აქვს მოცემულ n-კუთხედს. ამით დებულება დამტკიცებულია.

ამოცანა N6. დავადგინოთ, თუ რამდენ სამკუთხედად შეიძლება დაიყოს n-კუთხედი მისი გადაუკვეთი დიაგონალების საშუალებით.

ამოხსნა:

სამკუთხედისთვის ეს რიცხვი 1-ის ტოლია (სამკუთხედში დიაგონალი არ გაივლება). ოთკუთხედისთვის ეს რიცხვი, ცხადია, ტოლია 2-ის.

დავუშვათ, რომ ჩვენ უკვე ვიცით,რომ ნებისმიერი k-კუთხედი, სადაც $k<n$, გადაუკვეთი დიაგონალებით იყოფა k-2 სამკუთხედად (ნებისმიერი დაყოფის შემთხვევაში).

განვიხილოთ $A_1A_2\cdots A_n$ n- კუთხედის ერთ-ერთი დაყოფა სამკუთხედებად.

ვთქვათ, A_1A_k მისი ერთ-ერთი დიაგონალია. ის ყოფს $A_1A_2\cdots A_n$ n-კუთხედს k-კუთხედად ($A_1A_2\cdots A_k$) და (n-k+2)-კუთხედად ($A_1A_kA_{K+1}\cdots A_n$). დაშვების თანახმად სამკუთხედების საერთო რაოდენობა იქნება:

$k-2+[(n-k+2)-2]=n-2$

ამით დებულება დამტკიცებულია ნებისმიერი n-სათვის.

ამოცანა N7. გამოვთვალოთ R რადიუსიან წრეში ჩახაზული წესიერი 2^n კუთხედის a_{2^k} გვერდი.

ამოხსნა:

n=2-სათვის წესიერი 2^n-კუთხედი არის კვადრატი; მისი გვერდია a_4=R$\sqrt{2}$.

ორმაგი კუთხის ფორმულის გამოყენებით ვღებულობთ, რომ $a_{2^{n+1}}=\sqrt{2R^2-2R\sqrt{R^2-\frac{a_{2^n}}{4}}}$

ამ ფორმულს გამოყენებით ვღებულობთ, რომ წესიერი რვაკუთხედის გვერდია a_8=R$\sqrt{2-\sqrt{2}}$, წესიერი თექვსმეტკთხედის გვერდია a_{16}=R$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$,ხოლო წესიერი ოცდათორმეტკუთხედის გვერდია a_{32}=R$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$. აქედან გამომდინარე შეგვიძლია ვივარაუდოთ, რომ წესიერი ჩახაზული 2^n-კუთხედის (n≥2) გვერდი ტოლია:

$$a_{2^n}=R\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n-2}} \qquad (1)$$

დავუშვათ, რომ წესიერი ჩახაზული 2^n- კუთხედის გვერდი გამოისახება (1) ფორმულით. მაშინ ორმაგი კუთხის ფორმულის თანახმად:

$$a_{2^{n+1}}=\sqrt{2R^2-2R\sqrt{R^2-R^2\frac{2-\underbrace{\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}_{n-2}}{4}}}=\mathrm{R}\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}_{n-1}}$$

აქედან გამომდინარეობს,რომ ფორმულა სამართლიანია ნებისმიერი n-სათვის.

სავარჯიშოები:

1 დაამტკიცეთ, რომ ამოზნექილი n-კუთხედის

ა) შიგა კუთხეების ჯამია 180^0(n-2).

ბ) დიაგონალების რაოდენობაა $\frac{n(n-3)}{2}$.

2. სიბრტყეზე გავლებულია n რაოდენობის წრეწირი, ისე რომ ყოველი ორი წრეწირი იკვეთება ორ წერტილში და არც ერთი სამი არ გადის ერთ წერტილზე. რამდენ ნაწილად დაიყოფა სიბრტყე?

3. დაამტკიცეთ, რომ ერთ სიბრტყეზე მდებარე n წრეწირი ამ სიბრტყეს ყოფს ნაწილებად, რომელთა რაოდენობა არ აღემატება (n^2- n + 2)-ს.

4. რამდენ სამკუთხედად შეიძლება დანაწილდეს ამოზნექილი n-კუთხედი თავისი არაგადამკვეთი დიაგონალებით?

5. დაამტკიცეთ, რომ ერთ სიბრტყეში მდებარე და ერთ წერტილზე გამავალი n რაოდენობის წრფე, სიბრტყეს გაყოფს 2n ნაწილად.

6*. სიბრტყეზე გავლებულია n რაოდენობის წრეწირი, ისე რომ ყოველი ორი წრეწირი იკვეთება ორ წერტილში და არც ერთი სამი არ გადის ერთ წერტილზე. რამდენ ნაწილად დაიყოფა სიბრტყე?

სავარჯიშოები გამეორებისათვის

1. დაწერეთ (a_n) -ის n-ური წევრის ფორმულა, თუ

ა) $a_1=1$; $a_{n+1}=a_n+2^n$ ბ) $a_1=4$; $a_{n+1}=2a_n-3$

2. (a_n) ფიბონაჩის მიმდევრობაა დაამტკიცეთ, რომ

ა) $a_n^2 - a_{n-1} \cdot a_{n+1}=(-1)^n$ ბ) $a_n \cdot a_{n+1}=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2$

3. არითმეტიკულ პროგრესიაში $a_{m+n}=A$; $a_{m-n}=B$. იპოვეთ a_m და a_n.

4. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის, ოთხკუთხედის. ხუთკუთხედის და ა. შ. შიგა კუთხეების ჯამთა მიმდევრობა არითმეტიკული პროგრესიაა. იპოვეთ მისი სხვაობა.

5. იპოვეთ (a_n)-ის უდიდესი და უმცირესი წევრები (თუ არსებობს)

ა) $a_n=-n^2-4n+1$ ბ) $a_n=2n^2-5n+3$ გ) $a_n=\frac{1}{n-3,5}$

6. დაამტკიცეთ, რომ თუ (a_n) არითმეტიკული პროგრესიაა, მაშინ

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}$$

7. დაამტკიცეთ, რომ არითმეტიკულ პროგრესიაში

$\frac{S_1}{n_1}(n_2-n_3)+\frac{S_2}{n_2}(n_3-n_1)+\frac{S_3}{n_3}(n_1-n_2)=0.$ სადაც S_1 ____პირველი n_1 წევრის ჯამია S_2 ____პირველი n_2 წევრის ჯამი, S_3 ____პირველი n_3 წევრის ჯამი.

8. ამოხსენით განტოლებანი: ა) $(x+1)+(x+3)+\ldots+(x+19)=110$

ბ) $5+9+\ldots+x=230$

9. დაამტკიცეთ, რომ $S_n(S_{3n}-S_{2n})=(S_{2n}-S_n)^2$. თუ S_n; S_{2n}; S_{3n} არის შესაბამისად პირველი n, 2n და 3n წევრების ჯამი ერთი და იმავე გეომეტრიული პროგრესიისა.

10. გამოთვალეთ 1; 7; 43; . . . $\frac{6^n-1}{5}$; . . . მიმდევრობის პირველი n წევრის ჯამი.

(მითითება: $1=\frac{6^1-1}{5}$; $7=\frac{6^2-1}{5}$; $43=\frac{6^3-1}{5}$)

11. დაამტკიცეთ, რომ თუ 2^p-1 მარტივი რიცხვია, მაშინ p –ც მარტივი რიცხვია (გამოიყენეთ საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდი)

12. დაამტკიცეთ, რომ თუ $\forall n \in Z_0^+$

ა) $(2^{n+2}\cdot 3^n+5n-4) \vdots 25$; ბ) $(7^{n+2}+8^{2n+1}) \vdots 57$;

გ) $(5^{3n+1}+2^{n+5}\cdot 3^{4n}) \vdots 37$; დ) $(3^{3n+2}+5\cdot 2^{3n+1}) \vdots 19$

13. დაამტკიცეთ, რომ $\forall n \in N$; ა) $1-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$

ბ) $2\cdot 1^2+3\cdot 2^2+\ldots+n(n-1)^2+(n+1)n^2=\frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{1\cdot 3\cdot 4}$

დ) $(n+1)(n+2)\ldots(n+n)=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)$

14. დაამტკიცეთ, რომ $\forall n \in N$

ა) $(x-\frac{1}{x})^2+(x^2-\frac{1}{x^2})^2+\ldots+(x^n-\frac{1}{x^n})^2=\frac{1}{x^2-1}(x^{2n+2}-\frac{1}{x^{2n}})-2n-1;\quad x\neq 0;\ \pm 1;$

ბ) $\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\ldots+\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\frac{n}{a(a+n)};\quad a\in N$

გ) $\frac{a+1}{2}+\frac{a+3}{4}+\frac{a+7}{8}+\ldots+\frac{a+2^n-1}{2^n}=\frac{(a-1)(2^n-1)}{2^n};\quad a\in N$

15. დაამტკიცეთ, რომ ა) $5^n > 7n-3$; როცა $\forall n \in N$; ბ) $2^{n-1} > n(n+1)$; $\forall n \in N$ $n\geq 7$;
ე) $4^n \geq 3^n+n^2$; $\forall n \in N$; $n\geq 2$ ვ) $n! > 2^{n-1}$; $\forall n \in N$ $n\geq 3$;

16. გამოთვალეთ ჯამი $1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+5\cdot 2^4+\ldots+100\cdot 2^{99}$;

ამოხსნა: $S_{100}=1+2+2^2+2^3+2^4+\ldots+2^{98}+2^{99}$

$+2+2^2+2^3+2^4+\ldots+2^{98}+2^{99}$

$+2^2+2^3+2^4+\ldots+2^{98}+2^{99}$

$+2^3+2^4+\ldots+2^{98}+2^{99}$

$+2^4+\ldots+2^{98}+2^9$

. . . .

$+2^{98}+2^{99}$

$+2^{99}$

ყოველ სტრიქონში არის ჯამი გეომეტრიული პროგრესიისა.

$S_{100}=1\cdot\frac{2^{100}-1}{2-1}+2\cdot\frac{2^{99}-1}{2-1}+2^2\cdot\frac{2^{98}-1}{2-1}+2^3\cdot\frac{2^{97}-1}{2-1}+\ldots+2^{98}\cdot\frac{2^2-1}{2-1}+2^{99}\cdot\frac{2^1-1}{2-1}=$

$=100\cdot 2^{100}-(1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{98}+2^{99})=100\cdot 2^{100}-\frac{2^{100}-1}{2-1}=99\cdot 2^{100}+1;$

17. გამოთვალეთ ნამრავლი $2^{\frac{1}{2}}\cdot 4^{\frac{1}{4}}\cdot 8^{\frac{1}{8}}\cdot 16^{\frac{1}{16}}\ \ldots$

18. I. დაამტკიცეთ, რომ $\forall n \in N$

1. $-1+3-5+7-9+\ldots+(-1)^n.(2n-1)=(-1)^n.n$

2) $2\cdot 2^0+3\cdot 2^1+4\cdot 2^2+\ldots+(n+1)\cdot 2^{n-1}=n\cdot 2^n$

2. $(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{1}{(n+1)^2})=\frac{n+2}{2n+2}$

3. $\frac{1}{5\,.11}+\frac{1}{11\,.17}+\ldots+\frac{1}{(6n-1)(6n+5)}=\frac{n}{5(6n+5)}$

4. $\frac{1}{1.\,10}+\frac{1}{10\,.\,19}+\ldots+\frac{1}{(9n-8)(9n+1)}=\frac{n}{9n+1}$

5. $\frac{1}{1\,.3}+\frac{2}{3\,.5}^{2}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+)}$

6. $\frac{1}{1\,.2\,.\,3\,.\,4}+\frac{1}{2\,.\,3\,.\,4\,.5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{3}(\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)})$

$(1-\frac{1}{x})^2+(x^2-\frac{1}{x^2})^2+\ldots+(x^n-\frac{1}{x^n})^2=\frac{1}{x^2-1}(x^{2n+2}--\frac{1}{x^{2n}})-2n-1\quad x\neq 0;\ 1;\ -1.$

II. დაამტკიცეთ, რომ $\forall n \in N$

1) $(4^n + 15n - 1) \vdots 9$ 2) $(3^{2n+1} + 40n - 67) \vdots 64$

3) $(11^{n+2} + 12^{2n+1}) \vdots 133$ 4) $(6^{n+1} + 7^{2n-1}) \vdots 43$

5) $(5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1}) \vdots 23$ 6) $(3^{2n+2} \cdot 5^{2n} - 3^{3n+2} \cdot 2^{2n}) \vdots 1053$

III. დაამტკიცეთ, რომ $\forall n$, $n \geq 2$

1) $\frac{n}{2^n} < \frac{2}{n-1}$, $n \geq 2$; 2) $\frac{2^n}{n!} \leq \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$, $n \geq 2$;

2) $\frac{4^n}{2n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$, $n \geq 2$ 4) $3^n \geq 2^n + n$, $n \in N$;

5) $4^n > 3^n + 2^n$, $n \geq 2$; 6) $2^{n-1}(a^n + b^n) \geq (a+b)^n$, $a>0; b>o$, $n \in N$;

IV. მოცემულია: (a_n) იპოვეთ a_n. თუ:

1) $a_1=1$, $a_{n+1} = a_n + 2^n$, 2) $a_1=4$; $a_{n+1} = 2a_n - 3$;

2) $a_1=3$; $a_2=15$; $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n$.;

V. მოცემულია: (a_n); $n \in N$;

1) $a_1=1$; $a_2=9$; $a_{n+2} = 9a_{n+1} - 20a_n$. დაამტკიცეთ, რომ $a_n = 5^n - 4^n$.

2) $a_1=29$; $a_2=85$; $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 26a_n$. დაამტკიცეთ, რომ $a_n = 2^n - 3^{n+2}$

პასუხები:

§ 1. 6. ბ) $a_8=a_9=-72$. გ)არა. 7.ა) $\frac{n}{n+1}$; ბ) n^3 გ) $3n-4$; დ) n^2+1; ე) n^3+1; ვ) $(-1)^{n+1}\cdot\frac{(2n-1)(2n+1)}{2n(2n+2)}$; ზ) $n^2+(n+1)^2$; თ) n^2-6n+7; 8. ა)ზრდადია; ბ)კლებადია; გ)ზრდადია; დ) კლებადია; ე) ზრდადია; 9.ა) $5\frac{4}{13}$;9;ბ) $2\frac{3}{4}$;2; გ)2; 10.ა) $n\geq 9$; ბ) $1\leq n\leq 15$; გ) $n\geq 33$; დ) $26\leq n\leq 59$;11. ბ) 4; 3. 12.ა) $y_3=12$ უდიდესია; გ) $y_3=-2$; $y_4=2$; დ) $y_1=-7$; უმცირესია; **§ 2** 3.გ) $x_n=(-1)^{n+1}$; დ) $y_n=n(n+1)$; 4. დ) $b_1=3$; $b_{n+1}=b_n+3n$; 5. $a_{15}=a_{27}=6$; $a_{137}=4$; **§ 3.** 3. ბ) $20-2\sqrt{3}$; 6. ა) 23; ბ) 5 7. გ) $\frac{3m+n}{4}$; $\frac{m+n}{2}$; $\frac{m+3n}{4}$; 8. ა)21; 1,5; ბ) 120; -1; გ) 38; -2; დ) -2,5; 0,5; 14. ა) $a_{21}=143$; ბ)არ ეკუთვნის. 15. ა) $1\leq n\leq 30$; ბ) $n\geq 31$; გ) $1\leq n\leq 13$; დ) $n\geq 64$; 16. ა) $a_{15}=0{,}1$; ბ) $-\frac{1}{60}$; 17. ა) არის. ბ) არის. გ) არ არის. დ)არ არის. 20. ა) $a_1=2$; $d=7$. ბ) $a_1=7$; $d=3$. გ) $a_1=-5$; $d=3$. ან $a_1=7$; $d=-3$. დ) $a_1=-8$; $d=3{,}5$. 22. (2; 3), (-2; 3). 23. 1830. **§ 4.** 3. ბ) 2700; გ) $1375\sqrt{2}$. 4. ა) 100; $\frac{2}{5}$; ბ) 51; 0,1. 5. ა) 7; 28. ბ) 0,2; 6,5. 6. ა) 4905. გ) 11400. დ) 7500. 7. ა) $a_1=1$; $d=3$; ბ) $a_1=-8$; $d=3$; დ) $a_1=8$; $d=-3$; 8. ა) 1650. ბ)16000. გ) 6720. 11. 203,5; 12. 10წმ. 13. 16; 14. ა) 162; ბ) -744; 15. 5050; 16. ა)1605; 17. ა)არის. ბ) არის. გ) არ არის. 18. 1600; 19. ა) 24; ბ) 21; 20. ა) 55; ბ)1; 22. $3n^2-7n$; **§ 5.** 12. ა) 8; ბ) 7; 13. ა) 16 ბ) $\pm\sqrt{5}$ 14. ა) 1; $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$; ბ) 1; 2; 17. 0,375; 20 8; 1; 21. არ შეიძლება. $11=10\cdot q^n$; $12=10\cdot q^n$; $(\frac{11}{10})^m=(\frac{12}{10})^n$; $\frac{11^m}{12^n}=10^{m-n}$; რაც შეუძლებელია.

ვ) $3^{3n+2}+5\cdot 2^{3n+1}=9\cdot 27^n+10\cdot 8^n=9(27^n-8^n)+19\cdot 8^n$ 9. ბ) $1+3+3^2+\ldots+3^{5n-1}=\frac{3^{5n}-1}{2}=\frac{243^n-1}{2}$ 11. 70; 12. 4; 10; 16. 13. 75; 15; 3. 14 .ა) $\frac{x^{n+1}-x^k}{x-1}$; ბ) $\frac{x^{2n+1}+1}{x+1}$; 15. 8; 1; 16. $(\frac{10^{n+1}+2}{3})^2$ 17. $a=a\cdot 1$; $\overline{aa}=a\cdot 10+a$; $\overline{aaa}=a\cdot 1+a\cdot 10+a\cdot 10^2$; $\overline{aaaa}=a\cdot 1+a\cdot 10+a\cdot 10^2+a\cdot 10^3$; . . .

$\underbrace{\overline{aa\ldots a}}=\ =a\cdot 1+a\cdot 10+a\cdot 10^2+\ldots+a\cdot 10^{n-2}+a\cdot 10^{n-1}$

$a+\overline{aa}+\overline{aaa}+\overline{aaaa}+\ldots+\overline{aa\ldots a}=a+a(1+10)+a(1+10+10^2)+a(1+10+10^2+10^3)+\ldots+$

$+(1+10+10^2+\ldots+10^{n-2}+10^{n-1})=\frac{a(10^{n+1}-9n-10)}{81}$ **§ 7.** 3. ა) 1,5; ბ) $11\frac{1}{4}$; გ) 6 ან 12; 5. ა) $1+\sqrt{2}$; ბ) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$; 6. 6 ან 12; 7. $q=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$; 8. 6; $\frac{1}{3}$; 9. 1; $\frac{1}{4}$; 10. 16; 12. ა) $(2+\sqrt{2})\pi R$; ბ) $2\pi R^2$; გ) $(1+\sqrt{2})8R$; დ) $4R^2$; 13. ა) 6a; ბ) $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$; **§ 8.** ა) 158; ბ) -264; **§ 9.** 5.ა) $a_n=n!$ ბ) $a_n=n(n+1)$; გ) $a_n=\frac{1}{n}$; დ) $\frac{n+1}{n+2}$

§ 10. 2) როცა $n=1$; $(a-b):(a-b)=1$; $n=2$ $(a^2-b^2):(a-b)=a-b$; $n=3$ $(a^3-b^3):(a-b)=a^2+ab+b^2$ $n=4$ $(a^4-b^4):(a-b)=a^3+a^2b+ab^2+b^3$ ჰიპოთეზა: $n\geq 2$ მაშინ: $(a^n-b^n):(a-b)=a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+b^{n-1}$. დაამტკიცეთ.

დამატებითი სავარჯიშოები

1.ა) 2^n-1; ბ) $2^{n-1}+3$; 5. ა) $a_1=-4$;უმცირესია; ბ) $a_1=0$; უმც. გ) $y_{უდ}=2$; $y_{უმც}=-2$; 8. ა) 1; ბ) 41; 10. $\frac{6^{n+1}-5n-6}{25}$. 17. 4 . ჰიპოთეზა: $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\ldots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$ დაამტკიცეთ.

სარჩევი: